

МУНИЦИПАЛЬНОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«СРЕДНЯЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ШКОЛА № 25»



Утверждаю
Директор МБОУ «СОШ № 25»
Е.И.Свирид
Приказ № 109 от «31» октября 2024г.

Авторская педагогическая разработка по математике

«Подготовка к ОГЭ»

(34 часа для обучающихся 9 класса)

Авторы разработки:

Кириленко В.В.,
учитель математики, 1 категория
Донская Т.А.,
учитель математики, 1 категория
Волкова И.И.,
учитель математики

г. Ангарск, 2024 г.

Аннотация

Данная методическая разработка посвящена проблеме подготовки к ОГЭ по математике выпускников 9 классов. В нее входят задания, подобные экзаменационным, подготовительные задания для отработки элементов каждой темы, варианты для самостоятельного выполнения. Данная разработка поможет обучающимся эффективнее подготовиться к сдаче экзамена. Надеюсь, что данная методическая разработка окажется полезной как выпускникам основной школы, так и учителям, позволив им лучше ориентироваться в предстоящей итоговой аттестации.

Методическая разработка может быть использована для организации итогового повторения (в том числе с начала учебного года) и завершающего этапа подготовки к экзамену в 9 классе.

СОДЕРЖАНИЕ

I. Пояснительная записка

Введение

1. Цель и задачи программы
2. Ожидаемые результаты освоения программы
3. Учебно-тематический план
4. Содержание программы

II. Методическое обеспечение программы

III. Приложения

1. Календарно-тематическое планирование учебного материала
2. Разработка занятий

Пояснительная записка

Введение

Программа курса предназначена для учащихся 9 классов, рассчитана на 34 часа. Курс представлен в виде практикума, который позволит систематизировать и расширить знания учащихся в решении задач по математике и позволит начать целенаправленную подготовку к сдаче экзамена.

Экзаменационная работа по математике в новой форме (ОГЭ) состоит из двух частей. Первая часть предполагает проверку уровня обязательной подготовки обучающихся (владение понятиями, знание свойств и алгоритмов, решение стандартных задач).

Вторая часть имеет вид традиционной контрольной работы. Эта часть работы направлена на дифференцированную проверку повышенного уровня математической подготовки обучающихся: владение формально – оперативным аппаратом, интеграция знаний из различных тем школьного курса, исследовательские навыки.

Структура экзаменационной работы и организация проведения экзамена отличаются от традиционной системы аттестации, поэтому и подготовка к экзамену должна быть другой.

Данный курс имеет основное назначение – введение открытой, объективной независимой процедуры оценивания учебных достижений обучающихся, результаты которой будут способствовать осознанному выбору дальнейшего пути получения образования; развивает мышление и исследовательские знания обучающихся; формирует базу общих универсальных приемов и подходов к решению заданий соответствующих типов.

Основной особенностью этого курса является отработка заданий по всем разделам курса математики основной школы: арифметике, алгебре, статистике и теории вероятностей, геометрии.

1. Цель курса – создание условий для формирования и развития у обучающихся навыков анализа и систематизации полученных ранее знаний, подготовка к итоговой аттестации в форме ОГЭ.

Задачи курса:

- ✓ дать ученику возможность проанализировать свои способности;
- ✓ помочь ученику выбрать профиль в дальнейшем обучении в средней школе.
- ✓ Повторить, обобщить и углубить знания по алгебре и геометрии за курс основной общеобразовательной школы.

- ✓ Расширить знания по отдельным темам курса «Алгебра 5-9» и «Геометрия 7-9».

Выработать умение пользоваться контрольно-измерительными материалами.

Функции курса:

- ✓ ориентация на совершенствование навыков познавательной, организационной деятельности;
- ✓ компенсация недостатков в обучении математике.

Рассчитанная на 34 часа, программа может быть реализована в 9 классах по 1 часу в неделю.

В организации процесса обучения в рамках рассматриваемого курса используются две взаимодополняющие формы: урочная форма и внеурочная форма, в которой учащиеся дома выполняют практические задания для самостоятельного решения.

2. Предполагаемые результаты.

Изучение данного курса дает учащимся возможность:

- повторить и систематизировать ранее изученный материал школьного курса математики;
- освоить основные приемы решения задач;
- овладеть навыками построения и анализа предполагаемого решения поставленной задачи;
- познакомиться и использовать на практике нестандартные методы решения задач;
- повысить уровень своей математической культуры, творческого развития, познавательной активности;
- познакомиться с возможностями использования электронных средств обучения, в том числе Интернет-ресурсов, в ходе подготовки к итоговой аттестации в форме ОГЭ.

3. Учебно-тематический план

№	Наименование разделов	Количество часов
1	Раздел 1. Числа и выражения.	3
2	Раздел 2. Алгебраические выражения.	3
3	Раздел 3. Уравнения, неравенства и их системы.	4
4	Раздел 4. Числовые последовательности.	2
5	Раздел 5. Функции. Числовые функции.	2
6	Раздел 6. Координаты на прямой и плоскости.	1
7	Раздел 7. Геометрия.	12
8	Раздел 8. Статистика и теория вероятностей.	2

9	Итоговое повторение.	5
---	----------------------	---

4. Содержание программы

1. Числа, числовые выражения, проценты

Натуральные числа. Арифметические действия с натуральными числами. Свойства арифметических действий. Делимость натуральных чисел.

Делители и кратные числа. Признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10. Деление с остатком. Простые числа. Разложение натурального числа на простые множители. Нахождение НОК, НОД. Обыкновенные дроби, действия с обыкновенными дробями. Десятичные дроби, действия с десятичными дробями. Применение свойств для упрощения выражений. Тождественно равные выражения. Проценты. Нахождение процентов от числа и числа по проценту.

2. Буквенные выражения

Выражения с переменными. Тождественные преобразования выражений с переменными. Значение выражений при известных числовых данных переменных.

3. Преобразование выражений. Формулы сокращенного умножения. Рациональные дроби

Одночлены и многочлены. Стандартный вид одночлена, многочлена. Коэффициент одночлена. Степень одночлена, многочлена. Действия с одночленами и многочленами. Разложение многочлена на множители. Формулы сокращенного умножения. Способы разложения многочлена на множители. Рациональные дроби и их свойства. Допустимые значения переменных. Тождество, тождественные преобразования рациональных дробей.

Степень с целым показателем и их свойства.

4. Уравнения и неравенства

Линейные уравнения с одной переменной. Корень уравнения. Равносильные уравнения. Системы линейных уравнений. Методы решения систем уравнений: подстановки, метод сложения, графический метод. Квадратные уравнения. Неполное квадратное уравнение. Теорема Виета о корнях уравнения. Неравенства с одной переменной. Система неравенств. Методы решения неравенств и систем неравенств: метод интервалов, графический метод.

5. Прогрессии: арифметическая и геометрическая

Числовые последовательности. Арифметическая прогрессия. Разность арифметической прогрессии. Формула n -ого члена арифметической прогрессии. Формула суммы n -х членов арифметической прогрессии. Геометрическая прогрессия. Знаменатель геометрической прогрессии. Формула n -ого члена геометрической прогрессии. Формула суммы n членов геометрической прогрессии. Сумма бесконечной геометрической прогрессии.

6. Функции и графики

Понятие функции. Функция и аргумент. Область определения функции. Область значений функции. График функции. Нули функции. Функция, возрастающая на отрезке. Функция, убывающая на отрезке. Линейная функция и ее свойства. График линейной функции. Угловой коэффициент функции. Обратная пропорциональная функция и ее свойства. Квадратичная функция и ее свойства. График квадратичной функции. Степенная функция. Четная, нечетная функция. Свойства четной и нечетной степенных функций. Графики степенных функций. Чтение графиков функций.

7. Текстовые задачи

Текстовые задачи на движение и способы решения. Текстовые задачи на вычисление объема работы и способы их решений. Текстовые задачи на процентное содержание веществ в сплавах, смесях и растворах, способы решения.

8. Элементы статистики и теории вероятностей.

Методы решения комбинаторных задач: перебор возможных вариантов, дерево вариантов, правило умножения. Перестановки, размещения, сочетания. Начальные сведения из теории вероятностей. Вероятность случайного события. Сложение и умножение вероятностей.

9. Треугольники.

Высота, медиана, средняя линия треугольника. Равнобедренный и равносторонний треугольники. Признаки равенства и подобия треугольников. Решение треугольников. Сумма углов треугольника. Свойства прямоугольных треугольников. Теорема Пифагора. Теорема синусов и косинусов. Неравенство треугольников. Площадь треугольника.

10. Многоугольники.

Виды многоугольников. Параллелограмм, его свойства и признаки. Площадь параллелограмма. Ромб, прямоугольник, квадрат. Трапеция. Средняя линия трапеции. Площадь трапеции. Правильные многоугольники.

11. Окружность.

Касательная к окружности и ее свойства. Центральный и вписанный углы. Окружность, описанная около треугольника. Окружность, вписанная в треугольник. Длина окружности. Площадь круга.

12. Решение тренировочных вариантов и заданий из открытого банка заданий ОГЭ-9

МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ПРОГРАММЫ

Перечень учебных и методических пособий и дидактических материалов:

1. ГИА . Математика. 9 класс. Типовые тестовые задания (в новой форме). Яценко И.В., Шестаков С.А., Трепалин А.С., Семенов А.В., Захаров П.И.;
2. ГИА . Математика. 9 класс. Типовые тестовые задания Яценко И.В., Шестаков С.А., Трепалин А.С., Семенов А.А., Захаров П.И.;
3. Мирошин, Шевелева, Корешкова: ГИА-2019. Математика. Тренировочные задания;
4. Каспарова, Балаян: Справочник по математике для подготовки к ГИА и ЕГЭ;
5. ГИА. 3000 задач с ответами по математике Семенов А.Я. , Яценко И.В.
6. Лысенко Ф.Ф. «Математика 9 класс» подготовка к ГИА. «Легион» 2021
7. Лаппо Л.Д. «ГИА математика» «Экзамен» 2020
8. Алгебра: сб. заданий для подгот. к гос. итоговой аттестации в 9 кл. /[Л. В. Кузнецова, С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович и др.].- 5-е изд. — М. : Просвещение, 2010..

Перечень интернет ресурсов:

1. <http://www.prosv.ru> – сайт издательства „Просвещение, /рубрика,,Математика,,/
2. <http://www.drofa.ru>-сайт издательства «Дрофа»
3. <http://www.legion.ru>-сайт издательства «Легион»
4. <http://www.fipi.ru> - портал информационной поддержки мониторинга качества образования, Федеральный банк тестовых заданий, демоверсии
5. <http://zadachi.mcsme.ru>-Задачи по геометрии :информационно-поисковая система.
6. <http://www.intelekt centre.ru>-Сайт издательства „ Интеллект центр, где можно найти учебно-тренировочные материалы, банк тренировочных заданий с ответами , методические рекомендации и образцы решений.
7. Сайт «Сдам ГИА.рф»
8. Интернет – ресурсы <http://school-collection.edu.ru/> – единая коллекция цифровых образовательных ресурсов.
9. <http://4ege.ru/>
10. <http://gia.edu.ru/> - Официальный информационный портал поддержки ГИА
11. Сайт А.А.Ларина<http://alexlarin.net/ege.html>
12. Варианты тестов. <http://www.ctege.info/content/category/15/67/48/>
13. Сайт Ким Натальи Анатольевны <http://uztest.ru/exam>

Материально-техническое обеспечение

Для реализации программы необходимо:

1. Учебный кабинет, удовлетворяющий санитарно-гигиеническим требованиям, для занятий группы 12-15 человек (мебель: парты, стулья; интерактивная доска, шкаф для УМК).
2. Оборудование:
 - 2.1. Компьютер (ноутбук), укомплектованный выделенным каналом выхода в Интернет, необходимым программным обеспечением;
 - 2.2. Интерактивная доска;
 - 2.3. Принтер черно-белый, цветной;
 - 2.4. Сканер;
 - 2.5. Ксерокс.
3. Канцелярские принадлежности: ручки, карандаши, маркеры, корректоры; блокноты, тетради; бумага разных видов и формата (А 3, А 4); клей; файлы, папки, степлер, линейки, угольники и др.
4. Дидактический материал: тестовые работы, контрольно-измерительные материалы, карточки

с индивидуальными заданиями.

5. Наглядный материал: мультимедийные презентации, тематические видеоматериалы.

Календарно-тематическое планирование занятий курса

№ п/п	Тема занятия	Кол. час.	Дата	
			план	факт
1	Вводное занятие.	1		
2	Практико-ориентированные задачи. Задачи ОГЭ 1-5	1		
3	Практико-ориентированные задачи. Задачи ОГЭ 1-5	1		
4	Практико-ориентированные задачи. Задачи ОГЭ 1-5	1		
5	Практико-ориентированные задачи. Задачи ОГЭ 1-5	1		
6	Числа и вычисления. Задачи ОГЭ №6	1		
7	Числовые неравенства, координатная прямая. Задачи ОГЭ №7	1		
8	Числа, вычисления и алгебраические выражения. Задачи ОГЭ №8	1		
9	Уравнения, системы уравнений. Задачи ОГЭ №9	1		
10	Уравнения, системы уравнений. Задачи ОГЭ №9	1		
11	Уравнения, системы уравнений. Задачи ОГЭ №9	1		
12	Статистика, вероятности. Задачи ОГЭ №10	1		
13	Графики функций. Задачи ОГЭ №11	1		
14	Графики функций. Задачи ОГЭ №11	1		
15	Расчеты по формулам. Задачи ОГЭ №12	1		
16	Неравенства, системы неравенств. Задачи ОГЭ №13	1		
17	Неравенства, системы неравенств. Задачи ОГЭ №13	1		
18	Задачи на прогрессии. Формат 2021. Задачи ОГЭ №14	1		
19	Задачи на прогрессии. Формат 2021. Задачи ОГЭ №14	1		
20	Треугольники и их элементы. Задачи ОГЭ №15	1		
21	Четырёхугольники и их элементы. Задачи ОГЭ №15	1		
22	Многоугольники и их элементы. Задачи ОГЭ №15	1		
23	Окружность, круг и их элементы. Задачи ОГЭ №16	1		
24	Площади фигур. Задачи ОГЭ №17	1		
25	Фигуры на квадратной решётке. Задачи ОГЭ №18	1		
26	Анализ геометрических высказываний. Задачи ОГЭ №19	1		
27	Алгебраические выражения, уравнения, неравенства и их системы. Задачи ОГЭ №20	1		
28	Алгебраические выражения, уравнения, неравенства и их системы. Задачи ОГЭ №20	1		
29	Алгебраические выражения, уравнения, неравенства и их системы. Задачи ОГЭ №20	1		
30	Текстовые задачи на смеси. Задачи ОГЭ №21	1		
31	Текстовые задачи на работу. Задачи ОГЭ №21	1		
32	Текстовые задачи на работу. Задачи ОГЭ №21	1		
33	Итоговые тесты. Решение заданий КИМов ОГЭ.	1		
34	Итоговые тесты. Решение заданий КИМов ОГЭ.	1		

Занятие 1

Вводное занятие

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 25 заданий. Часть 1 содержит 19 заданий, часть 2 содержит 6 заданий с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 7 и 13 запишите в бланк ответов № 1 в виде одной цифры, которая соответствует номеру правильного ответа. Для остальных заданий части 1 ответом является число или последовательность цифр. Ответ запишите в поле ответа в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1. Если получилась обыкновенная дробь, ответ запишите в виде десятичной.

Решения заданий части 2 и ответы к ним запишите на бланке ответов № 2. Задания можно выполнять в любом порядке. Текст задания переписывать не надо, необходимо только указать его номер.

Все бланки заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелиевой или капиллярной ручки.

Сначала выполняйте задания части 1. Начать советуем с тех заданий, которые вызывают у Вас меньше затруднений, затем переходите к другим заданиям. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

При выполнении части 1 все необходимые вычисления, преобразования выполняйте в черновике. Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.

Если задание содержит рисунок, то на нём непосредственно в тексте работы можно выполнять необходимые Вам построения. Рекомендуем внимательно читать условие и проводить проверку полученного ответа.

При выполнении работы Вы можете воспользоваться справочными материалами, выданными вместе с вариантом КИМ, и линейкой.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Для прохождения аттестационного порога необходимо набрать не менее 8 баллов, из которых не менее 2 баллов должны быть получены за решение заданий по геометрии (задания 15–19, 23–25).

После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание в бланках ответов № 1 и № 2 был записан под правильным номером.

Перечень дополнительных материалов и оборудования, использование которых разрешено на ОГЭ, утверждён приказом Минпросвещения России и Рособрнадзора. Участникам разрешается использовать линейку, не содержащую справочной информации; выдаваемые вместе с КИМ справочные материалы, содержащие основные формулы курса математики образовательной программы основного общего образования.

Максимальное количество первичных баллов за выполнение всей экзаменационной работы, – 31.

Чтобы успешно сдать ОГЭ по математике, нужно знать весь курс школьной программы по алгебре и геометрии, основные правила и теоремы. И даже этого недостаточно. Нужно уметь решать задания, как по алгебре, так и по геометрии.

Чтобы сдать экзамен по математике на «3», нужно получить 8 баллов, то есть решить из первой части 6 заданий по алгебре и 2 задания по геометрии. Без геометрии не обойдемся! Выбираем самые легкие задания из КИМов и учимся их решать.

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО МАТЕМАТИКЕ

АЛГЕБРА

- Формула корней квадратного уравнения:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ где } D = b^2 - 4ac.$$
- Если квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ имеет два корня x_1 и x_2 , то

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2);$$
- если квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ имеет единственный корень x_0 , то

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2.$$

- Формула n -го члена арифметической прогрессии (a_n) , первый член которой равен a_1 и разность равна d :

$$a_n = a_1 + d(n - 1).$$

- Формула суммы первых n членов арифметической прогрессии:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

- Формула n -го члена геометрической прогрессии b_n , первый член которой равен b_1 , а знаменатель равен q :

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}.$$

- Формула суммы первых n членов геометрической прогрессии:

$$S_n = \frac{(q^n - 1)b_1}{q - 1}.$$

Таблица квадратов двузначных чисел

		Единицы									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Десятки	1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
	2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
	3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
	4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
	5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
	6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
	7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
	8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
	9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

ГЕОМЕТРИЯ

- Сумма углов выпуклого n -угольника равна $180^\circ(n - 2)$.
- Радиус r окружности, вписанной в правильный треугольник со стороной a , равен $\frac{\sqrt{3}}{6}a$.
- Радиус R окружности, описанной около правильного треугольника со стороной a , равен $\frac{\sqrt{3}}{3}a$.
- Для треугольника ABC со сторонами $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$
- где R — радиус описанной окружности.
- Для треугольника ABC со сторонами $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$
- Формула длины l окружности радиусом R :

$$l = 2\pi R.$$
- Формула длины l дуги окружности радиусом R , на которую опирается центральный угол в φ градусов:

$$l = \frac{2\pi R \varphi}{360}.$$
- Формула площади S параллелограмма со стороной a и высотой h , проведённой к этой стороне:

$$S = ah.$$
- Формула площади S треугольника со стороной a и высотой h , проведённой к этой стороне:

$$S = \frac{1}{2}ah.$$
- Формула площади S трапеции с основаниями a , b и высотой h :

$$S = \frac{a + b}{2}h.$$
- Формула площади S круга радиусом R :

$$S = \pi R^2.$$

Работа с бланками ответов

		ОСНОВНОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН - 2020	
Бланк ответов №1		Дата проведения (ДД-ММ-ГГ) - - 	
	Регион 	Код образовательной организации 	Класс Номер Буква
Код предмета 		Код ППЭ 	Номер аудитории
Название предмета 		Номер КИМ 	
Подпись участника строго внутри окошка.			
Заполнять теловой или хитпипарной ручной: ЧЕРНЫМИ чернилами по следующим образцам:			
А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 () А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У В Х Y Z , - ; : A A A O O E E E E I I O O O P P S			
ВНИМАНИЕ! Все бланки и листы с контрольными измерительными материалами рассматриваются в комплекте.			
Сведения об участнике			
Фамилия			
Имя			
Отчество (при наличии)			
Документ	Серия 	Номер 	
ЗАПРЕЩЕНЫ исправления в области ответов.			
Результаты выполнения заданий с КРАТКИМ ОТВЕТОМ			
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			
20			
21	Задание выполняется на бланке №2		
22	Задание выполняется на бланке №2		
23	Задание выполняется на бланке №2		
24	Задание выполняется на бланке №2		
25	Задание выполняется на бланке №2		
26	Задание выполняется на бланке №2		
27	Не заполняется		
28	Не заполняется		
29	Не заполняется		
30	Не заполняется		
31	Не заполняется		
32	Не заполняется		
Замена ошибочных ответов на задания с КРАТКИМ ОТВЕТОМ			
Количество заполненных полей «Замена ошибочных ответов» 			
Резерв-1 	Резерв-2 		
		Подпись ответственного организатора строго внутри окошка.	
		Удален с экзамена в связи с нарушением порядка проведения ОГЭ Не завершил экзамен по объективным причинам	

**Бланк ответов №2**

Лист №

1		
---	--	--

Резерв-3

--	--	--	--	--	--



Регион

--	--

Код предмета

--	--

Название предмета

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Номер КИМ

--	--	--	--	--	--	--	--

Перепишите значения полей "Регион", "Код предмета", "Название предмета", "Номер КИМ" из Бланка ответов №1.

Отвечая на задания с развернутым ответом, пишите аккуратно и разборчиво, соблюдая разметку страницы.

Не забудьте указать номер задания, на которое Вы отвечаете.

Условия задания переписывать не нужно.

ВНИМАНИЕ! Все бланки и листы с контрольными измерительными материалами рассматриваются в комплекте. Заполнять гелевой ручкой черными чернилами.

Занятие 2

Практико-ориентированные задачи. Задачи ОГЭ 1-5

ПРИМЕРЫ

«Печь для бани» (www.fipi.ru)

Хозяин дачного участка строит баню с парным отделением. Парное отделение имеет размеры: длина 3,6 м, ширина 2 м, высота 2,2 м. Окон в парном отделении нет, для доступа внутрь планируется дверь шириной 70 см, высота дверного проёма 1,8 м. Для прогрева парного отделения можно использовать электрическую или дровяную печь. В таблице представлены характеристики трёх печей.

Номер печи	Тип	Объём помещения (куб. м)	Масса (кг)	Стоимость (руб.)
1	дровяная	8 – 15,5	45	19 500
2	дровяная	11 – 19,5	53	22 000
3	электрическая	9 – 18	20	17 100

Для установки дровяной печи дополнительных затрат не потребуется. Установка электрической печи потребует подведения специального кабеля, что обойдётся в 5400 руб.

1. Установите соответствие между массами и номерами печей. Заполните таблицу, в бланк ответов перенесите последовательность трёх цифр без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Масса (кг)	45	20	53
Номер печи			

Номер печи	Тип	Объём помещения (куб. м)	Масса (кг)	Стоимость (руб.)
1	дровяная	8 – 15,5	45	19 500
2	дровяная	11 – 19,5	53	22 000
3	электрическая	9 – 18	20	17 100

Ответ: 132

2. Установите соответствие между стоимостями и номерами печей. Заполните таблицу, в бланк ответов перенесите последовательность трёх

цифр без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Стоимость (руб.)	17 100	19 500	22 000
Номер печи			

Номер печи	Тип	Объём помещения (куб. м)	Масса (кг)	Стоимость (руб.)
1	← дровяная	8 – 15,5	45	19 500
2	← дровяная	11 – 19,5	53	22 000
3	← электрическая	9 – 18	20	17 100

Ответ: 312

3. Установите соответствие между объёмами помещения и номерами печей, для которых данный объём является наибольшим для отопления помещений. Заполните таблицу, в бланк ответов перенесите последовательность трёх цифр без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

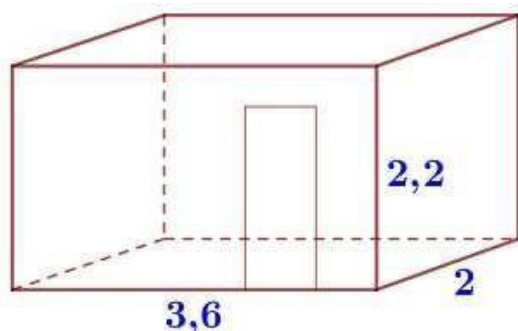
Объём (куб. м)	19	15	18
Номер печи			

Номер печи	Тип	Объём помещения (куб. м)	Масса (кг)	Стоимость (руб.)
1 ← 15	← дровяная	8 – 15,5	45	19 500
2 ← 19	← дровяная	11 – 19,5	53	22 000
3 ← 18	← электрическая	9 – 18	20	17 100

Рассматриваем наибольшее целое число куб. м, которое может отопить каждая печь.

Ответ: 213

4. Найдите объём парного отделения строящейся бани. Ответ дайте в кубических метрах.

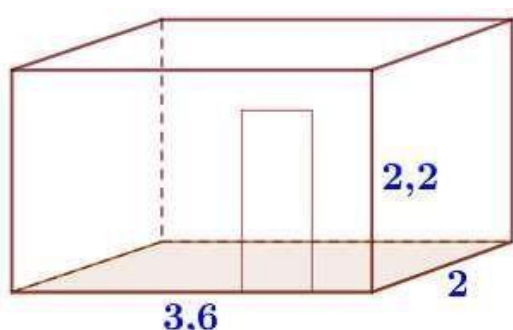


$$\begin{aligned} a &= 3,6 \text{ м (длина)} \\ b &= 2 \text{ м (ширина)} \\ c &= 2,2 \text{ м (высота)} \end{aligned}$$

$$V = abc = 3,6 \cdot 2 \cdot 2,2 = 15,84 \text{ (м}^3\text{)}$$

Ответ: **15,84**

5. Найдите площадь пола парного отделения строящейся бани. Ответ дайте в квадратных метрах.

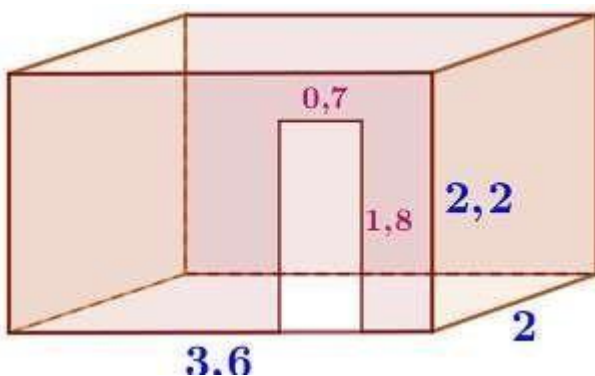


$$\begin{aligned} a &= 3,6 \text{ м (длина)} \\ b &= 2 \text{ м (ширина)} \end{aligned}$$

$$S_{\text{пола}} = ab = 3,6 \cdot 2 = 7,2 \text{ (м}^2\text{)}$$

Ответ: **7,2**

6. Найдите суммарную площадь стен парного отделения строящейся бани (без площади двери). Ответ дайте в квадратных метрах.



$$70 \text{ см} = 0,7 \text{ м}$$

$$\begin{aligned} a &= 3,6 \text{ м (длина)} \\ b &= 2 \text{ м (ширина)} \\ c &= 2,2 \text{ м (высота)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{\text{стен}} &= P_{\text{основ}} \cdot h = 2(a+b) \cdot h = \\ &= 2 \cdot (3,6 + 2) \cdot 2,2 = 24,64 \text{ (м}^2\text{)} \end{aligned}$$

$$S_{\text{двери}} = 0,7 \cdot 1,8 = 1,26 \text{ (м}^2\text{)}$$

$$S_{\text{стен}} - S_{\text{двери}} = 24,64 - 1,26 = 23,38 \text{ (м}^2\text{)}$$

Ответ: **23,38**

7. На сколько рублей покупка дровяной печи, подходящей по объёму парного отделения, обойдётся дешевле электрической с учётом установки?

Объем парного отделения: $V = abc = 3,6 \cdot 2 \cdot 2,2 = 15,84 \text{ (м}^3\text{)}$ (см. задачу 4)
 $15,84 > 15,5$ и $15,84 < 19,5$ – по объему подходит печь номер 2.

	Стоимость (руб.)	Установка (руб.)	К оплате (руб.)
Дровяная печь № 2	22 000	0	$20\,000 + 0 = 22\,000$
Электрическая печь	17 100	5 400	$17\,100 + 5\,400 = 22\,500$
		<u>Экономия:</u>	$22\,500 - 22\,000 = 500$

Ответ: 500

8. Во сколько рублей обойдётся покупка дровяной печи, подходящей по объёму парного отделения, с доставкой, если доставка печи до дачного участка будет стоить 1 700 рублей?

Объем парного отделения: $V = abc = 3,6 \cdot 2 \cdot 2,2 = 15,84 \text{ (м}^3\text{)}$ (см. задачу 4)
 $15,84 > 15,5$ и $15,84 < 19,5$ – по объему подходит печь номер 2.

Стоимость (руб.)	Доставка (руб.)	К оплате (руб.)
22 000	1 700	$22\,000 + 1\,700 = 23\,700$

Ответ: 23 700

9. Во сколько рублей обойдётся покупка электрической печи с установкой и доставкой, если доставка печи до дачного участка будет стоить 900 рублей?

Стоимость (руб.)	Установка (руб.)	Доставка (руб.)	К оплате (руб.)
17 100	5 400	900	$17\,100 + 5\,400 + 900 = 23\,400$

Ответ: 23 400

10. На дровяную печь, масса которой 45 кг, сделали скидку 15%. Сколько рублей стала стоить печь?

Масса 45 кг у печи номер 1, ее стоимость – 19 500 рублей.

Стоимость (руб.)	Скидка (руб.)	Новая стоимость (руб.)
19 500	15% от 19 500: $19\,500 \cdot 0,15 = 2\,925$	$19\,500 - 2\,925 = 16\,575$

Ответ: 16 575

11. В прошлом году печи, указанные в таблице, стоили дороже. На них были сделаны скидки: на печь номер 1 скидка составила 20%, на печь номер 2 –

35%, на печь номер 3 – 25%. Сколько рублей стоила печь номер 3 в прошлом году?

Прошлый год – ?

Текущий год – 17 100 р., на 25% меньше



$$\begin{array}{l} x - 100\% \\ 17\,100 - 75\% \end{array}$$

$$\frac{x}{17\,100} = \frac{100}{75}$$

$$x = \frac{17\,100 \cdot 100}{75} = 22\,800 \text{ (р.)}$$

Ответ: 22800

12. Доставка любой печи из магазина до участка стоит 1 100 рублей. При покупке печи стоимостью больше 20 000 рублей магазин делает скидку 10% на товар и 30% на доставку. Сколько рублей будет стоить покупка печи номер 2 с доставкой на этих условиях?

$22\,000 > 20\,000 \Rightarrow$ скидка на товар – 10%, на доставку – 30%

	Стоимость (руб.)	Скидка (руб.)	К оплате (руб.)
Печь номер 2	22 000	10% от 22 000: $22\,000 \cdot 0,1 = 2\,200$	$22\,000 - 2\,200 = 19\,800$
Доставка	1 100	30% от 1 100: $1\,100 \cdot 0,3 = 330$	$1\,100 - 330 = 770$
		Общая стоимость:	$19\,800 + 770 = 20\,570$

Ответ: 20 570

13. Хозяин выбрал дровяную печь (рис. 1). Чертёж передней панели печи показан на рисунке 2.



Рис. 1

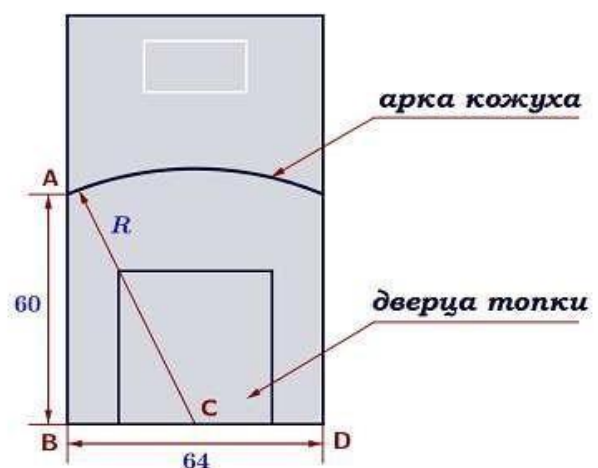
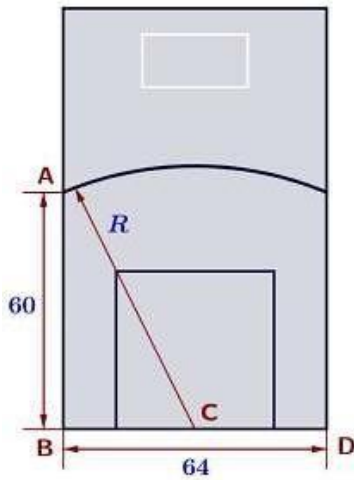


Рис. 2

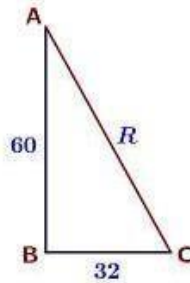
Печь снабжена кожухом вокруг дверцы топки. Верхняя часть кожуха выполнена в виде арки, приваренной к передней стенке печи по дуге окружности с центром в середине нижней части кожуха (см. рис. 2). Для

установки печки хозяину понадобилось узнать радиус закругления арки R . Размеры кожуха в сантиметрах показаны на рисунке. Найдите радиус закругления арки в сантиметрах.



C – середина $BD \Rightarrow BC = 64 : 2 = 32$ (см).

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC :



$AB = 60$ см, $BC = 32$ см, $AC = R$ см,
по теореме Пифагора:

$$R^2 = 60^2 + 32^2$$

$$R^2 = 3600 + 1024$$

$$R^2 = 4624$$

$$R = 68 \text{ (см)}$$

Ответ: **68**

Ресурсы:

Е. А. Ширяева (www.time4math.ru) Задачник (ОГЭ 2021)

Занятие 3

Практико-ориентированные задачи. Задачи ОГЭ 1-5

ПРИМЕРЫ

«Маркировка шин» (www.fipi.ru)

Последующая буква обозначает тип конструкции шины. В данном примере буква R означает, что шина радиальная, то есть нити каркаса в боковине шины расположены вдоль радиусов колеса. На всех легковых автомобилях применяются шины радиальной конструкции. За обозначением типа конструкции шины идёт число, указывающее диаметр диска колеса d в дюймах (в одном дюйме 25,4 мм). Таким образом, общий диаметр колеса D легко найти, зная диаметр диска и высоту боковины.

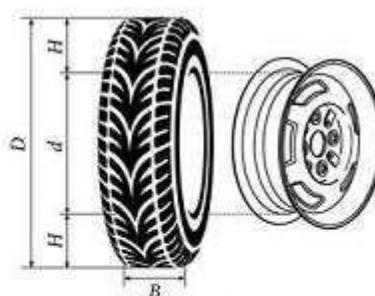


Рис. 2

Возможны дополнительные маркировки, обозначающие допустимую нагрузку на шину, сезонность использования, тип дорожного покрытия и другие параметры.

Завод производит легковые автомобили определённой модели и устанавливает на них колёса с шинами маркировки 195/60 R16.

Завод допускает установку шин с другими маркировками. В таблице показаны разрешённые размеры шин.

Ширина шины (мм)	Диаметр диска (дюймы)		
	16	17	18
185	185/65	185/60	–
195	195/60	195/55	–
205	205/55; 205/60	205/50	205/45
215	215/55	215/50	215/40; 215/45

1. Шины какой наименьшей ширины можно устанавливать на автомобиль, если диаметр диска равен 17 дюймам? Ответ дайте в миллиметрах.

Ширина шины (мм)	Диаметр диска (дюймы)		
	16	17	18
185	185/65	185/60	–
195	195/60	195/55	–
205	205/55; 205/60	205/50	205/45
215	215/55	215/50	215/40; 215/45

Допустимая ширина: 185 мм, 195 мм, 205 мм, 215 мм; наименьшая – 185 мм.

Ответ: 185.

2. На сколько миллиметров радиус колеса с шиной маркировки 185/65 R16 больше, чем радиус колеса с шиной маркировки 215/55 R16?

Маркировка:

B/p Rd



$$R = H + \frac{d}{2}$$

$$H = p\% \text{ от } B = B \cdot \frac{p}{100}$$

Важно!

d переводим в миллиметры
(1 дюйм = 25,4 мм)



185/65 R16

$$B_1 = 185 \text{ мм}$$

$$H_1 = 65\% \text{ от } 185 = 185 \cdot 0,65 \text{ (мм)}$$

$$d_1 = 16 \text{ дюймов}$$

$$d_1 = 16 \cdot 25,4 \text{ мм}$$

$$R_1 = H_1 + \frac{d_1}{2}$$

$$R_1 = 185 \cdot 0,65 + \frac{16 \cdot 25,4}{2}$$

215/55 R16

$$B_2 = 215 \text{ мм}$$

$$H_2 = 55\% \text{ от } 215 = 215 \cdot 0,55 \text{ (мм)}$$

$$d_2 = 16 \text{ дюймов}$$

$$d_2 = 16 \cdot 25,4 \text{ мм}$$

$$R_2 = H_2 + \frac{d_2}{2}$$

$$R_2 = 215 \cdot 0,55 + \frac{16 \cdot 25,4}{2}$$

$$R_1 - R_2 = \left(185 \cdot 0,65 + \frac{16 \cdot 25,4}{2} \right) - \left(215 \cdot 0,55 + \frac{16 \cdot 25,4}{2} \right) = 185 \cdot 0,65 - 215 \cdot 0,55 = \\ = 120,25 - 118,25 = 2 \text{ (мм)}$$

Ответ: 2.

3. Найдите диаметр колеса автомобиля, выходящего с завода. Ответ дайте в миллиметрах.

Маркировка:

B/p Rd



$$D = 2H + d$$

$$H = p\% \text{ от } B = B \cdot \frac{p}{100}$$

Важно!

d переводим в миллиметры
(1 дюйм = 25,4 мм)



195/60 R16

$$B = 195 \text{ мм}$$

$$H = 60\% \text{ от } 195 = 195 \cdot 0,6 \text{ (мм)}$$

$$d = 16 \text{ дюймов}$$

$$d = 16 \cdot 25,4 \text{ мм}$$

$$D = 2H + d$$

$$D = 2 \cdot 195 \cdot 0,6 + 16 \cdot 25,4 = \\ = 234 + 406,4 = 640,4 \text{ (мм)}$$

Ответ: 640,4.

4. На сколько миллиметров уменьшится диаметр колеса, если заменить колёса, установленные на заводе, колёсами с шинами маркировки 205/50 R17?

Маркировка:

B/p R d



$$D = 2H + d$$

$$H = p\% \text{ от } B = B \cdot \frac{p}{100}$$

Важно!

d переводим в миллиметры
(1 дюйм = 25,4 мм)



195/60 R16

$$B_1 = 195 \text{ мм}$$

$$H_1 = 60\% \text{ от } 195 = 195 \cdot 0,6 \text{ (мм)}$$

$$d_1 = 16 \text{ дюймов}$$

$$d_1 = 16 \cdot 25,4 \text{ мм}$$

$$D_1 = 2H_1 + d_1$$

$$D_1 = 2 \cdot 195 \cdot 0,6 + 16 \cdot 25,4$$

205/50 R17

$$B_2 = 205 \text{ мм}$$

$$H_2 = 50\% \text{ от } 205 = 205 \cdot 0,5 \text{ (мм)}$$

$$d_2 = 17 \text{ дюймов}$$

$$d_2 = 17 \cdot 25,4 \text{ мм}$$

$$D_2 = 2H_2 + d_2$$

$$D_2 = 2 \cdot 205 \cdot 0,5 + 17 \cdot 25,4$$

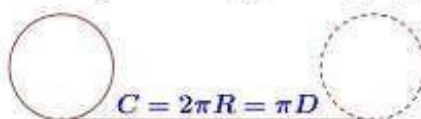
$$D_1 - D_2 = (2 \cdot 195 \cdot 0,6 + 16 \cdot 25,4) - (2 \cdot 205 \cdot 0,5 + 17 \cdot 25,4) =$$

$$= (234 + 406,4) - (205 + 431,8) = 3,6 \text{ (мм)}$$

Ответ: 3,6.

5. На сколько процентов увеличится пробег автомобиля при одном обороте колеса, если заменить колёса, установленные на заводе, колёсами с шинами маркировки 215/45 R18? Результат округлите до десятых.

Один оборот:



$$C_1 - 100\%$$

$$C_2 - x\%$$

195/60 R16

$$D_1 = 640,4 \text{ мм (см. задание 3)}$$

$$C_1 = \pi \cdot 640,4$$

215/45 R18

$$B_2 = 215 \text{ мм}$$

$$H_2 = 45\% \text{ от } 215 = 215 \cdot 0,45 \text{ (мм)}$$

$$d_2 = 18 \text{ дюймов}$$

$$d_2 = 18 \cdot 25,4 \text{ мм}$$

$$D_2 = 2H + d$$

$$D_2 = 2 \cdot 215 \cdot 0,45 + 18 \cdot 25,4 =$$

$$= 193,5 + 457,2 = 650,7 \text{ (мм)}$$

$$C_2 = \pi \cdot 650,7$$

$$\pi \cdot 640,4 - 100\%$$

$$\pi \cdot 650,7 - x\%$$

$$\frac{\pi \cdot 640,4}{\pi \cdot 650,7} = \frac{100}{x}$$

$$x = \frac{650,7 \cdot 100}{640,4} \approx 101,6$$

$$101,6 - 100 = 1,6$$

Ответ: 1,6.

6. Дмитрий планирует заменить зимнюю резину на летнюю на своём автомобиле. Для каждого из четырёх колёс последовательно выполняются четыре операции: снятие колеса, замена шины, балансировка колеса и установка колеса. Он выбирает между автосервисами А и Б. Затраты на дорогу и стоимость операций даны в таблице.

Авто-сервис	Суммарные затраты на дорогу	Стоимость для одного колеса			
		Снятие колеса	Замена шины	Балансировка колеса	Установка колеса
А	250 руб.	52 руб.	270 руб.	190 руб.	52 руб.
Б	430 руб.	45 руб.	250 руб.	170 руб.	45 руб.

Сколько рублей заплатит Дмитрий за замену резины на своём автомобиле, если выберет самый дешёвый вариант?

$$\text{Стоимость} = \text{затраты на дорогу} + 4 \cdot \left(\text{снятие колеса} + \text{замена шины} + \text{балансировка колеса} + \text{установка колеса} \right)$$

Вариант А: $250 + 4 \cdot (52 + 270 + 190 + 52) = 2506$ (руб.)

Вариант Б: $430 + 4 \cdot (45 + 250 + 170 + 45) = 2470$ (руб.)

Ответ: 2470.

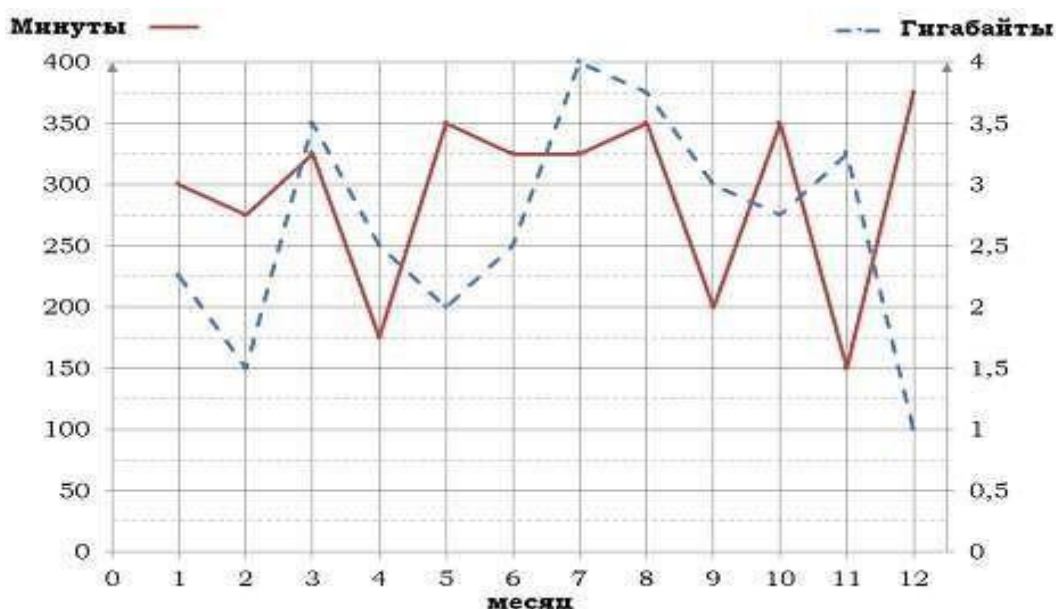
Занятие 4

Практико-ориентированные задачи. Задачи ОГЭ 1-5

ПРИМЕРЫ

«Тарифы» (www.fipi.ru)

На рисунке точками показано количество минут исходящих вызовов и трафик мобильного интернета в гигабайтах, израсходованных абонентом в процессе пользования смартфоном, за каждый месяц 2019 года. Для удобства точки, соответствующие минутам и гигабайтам, соединены сплошными и пунктирными линиями соответственно.



В течение года абонент пользовался тарифом «Стандартный», абонентская плата по которому составляла 360 рублей в месяц. При условии нахождения абонента на территории РФ в абонентскую плату тарифа «Стандартный» входит:

- пакет минут, включающий 300 минут исходящих вызовов на номера, зарегистрированные на территории РФ;
- пакет интернета, включающий 3 гигабайта мобильного интернета;
- пакет SMS, включающий 140 SMS в месяц;
- безлимитные бесплатные входящие вызовы.

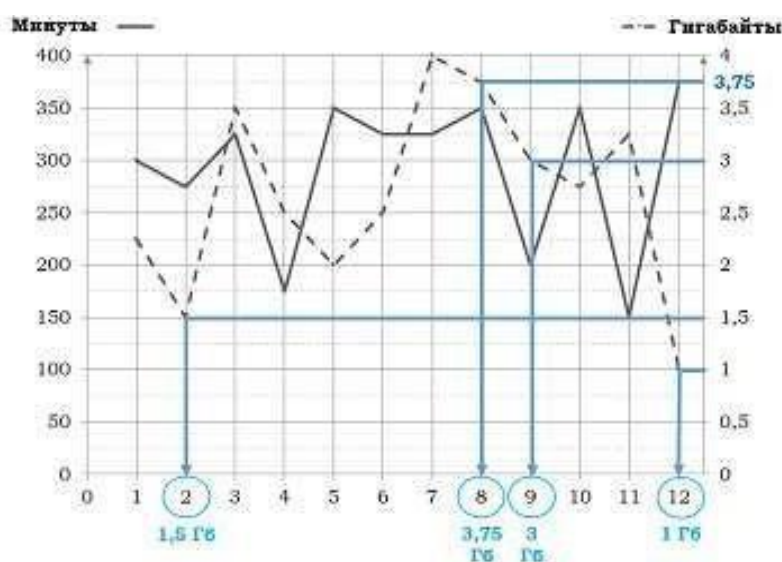
Стоимость минут, интернета и SMS сверх пакета тарифа указана в таблице.

Исходящие вызовы	3 руб./мин.
Мобильный интернет (пакет)	80 руб. за 0,5 ГБ
SMS	2 руб./шт.

Абонент не пользовался услугами связи в роуминге. За весь год абонент отправил 125 SMS.

1. Определите, какие месяцы соответствуют указанному в таблице трафику мобильного интернета. Заполните таблицу, в бланк ответов перенесите числа, соответствующие номерам месяцев, без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Мобильный интернет	1 ГБ	1,5 ГБ	3,75 ГБ	3 ГБ
Номер месяца				



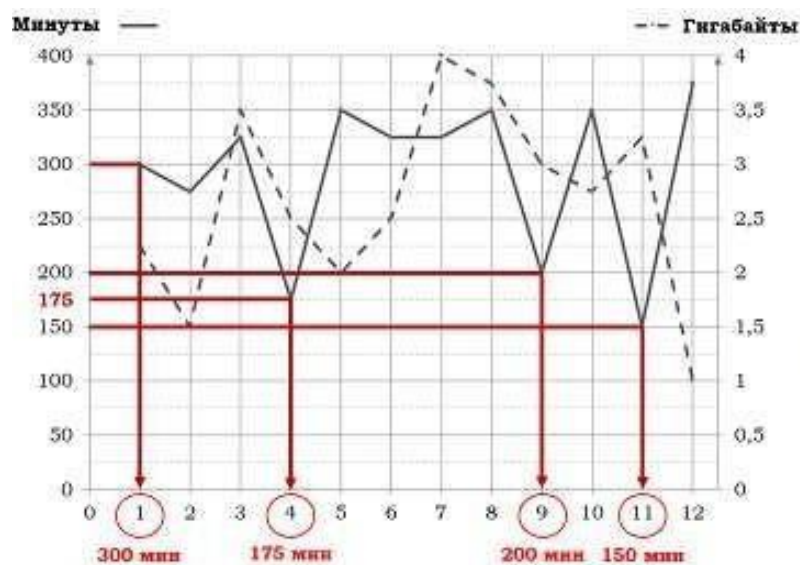
Мобильный трафик измеряется в Гб.

Точки, соответствующие гигабайтам, соединены пунктирными линиями.

Ответ: **12289**

2. Определите, какие месяцы соответствуют указанному в таблице количеству исходящих вызовов. Заполните таблицу, в бланк ответов перенесите числа, соответствующие номерам месяцев, без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

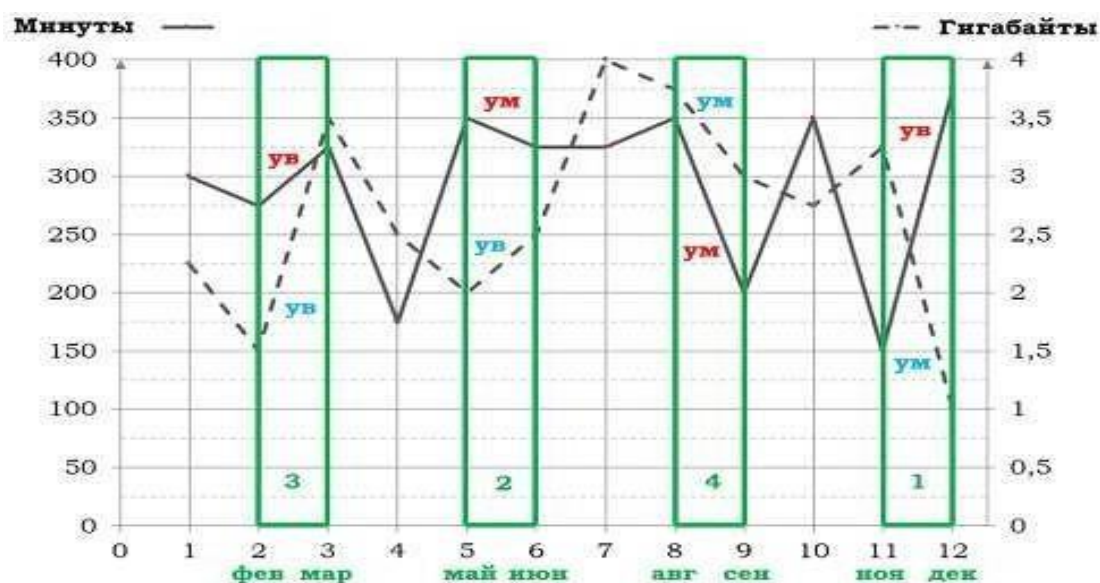
Исходящие вызовы	300 мин.	200 мин.	150 мин.	175 мин.
Номер месяца				



3. Пользуясь рисунком, поставьте в соответствие каждому из указанных периодов времени характеристику израсходованных минут и гигабайтов.

Периоды		Характеристики	
А)	февраль – март	1)	расход минут увеличился, а расход гигабайтов уменьшился
Б)	май – июнь	2)	расход гигабайтов увеличился, а расход минут уменьшился
В)	август – сентябрь	3)	расход минут увеличился и расход гигабайтов увеличился
Г)	ноябрь – декабрь	4)	расход минут уменьшился и расход гигабайтов уменьшился

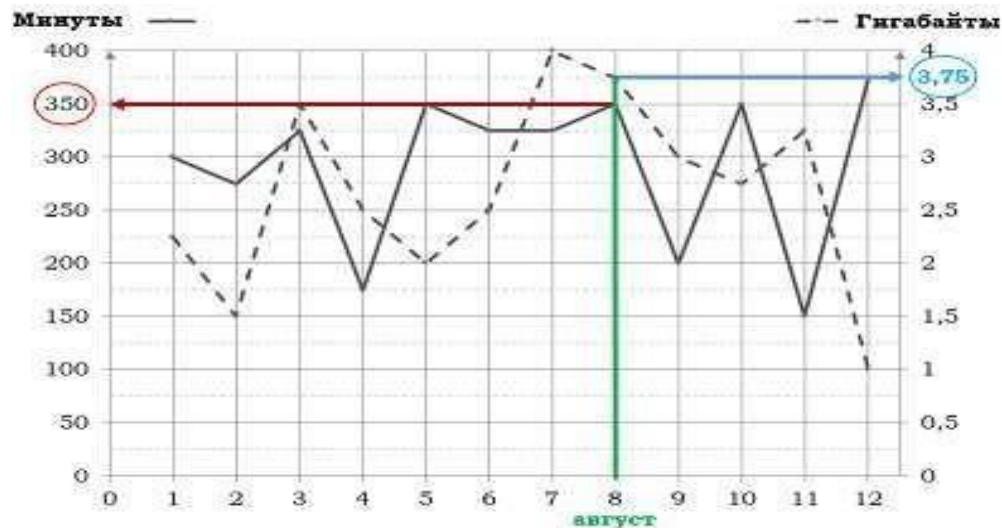
В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер. В ответ запишите последовательность цифр без пробелов, запятых и других дополнительных символов.



Февраль – март: расход минут увеличился, расход Гб увеличился $\Rightarrow 3$;
май – июнь: расход Гб увеличился, расход минут уменьшился $\Rightarrow 2$;
август – сентябрь: расход минут и расход Гб уменьшился $\Rightarrow 4$;
ноябрь – декабрь: расход минут и расход Гб увеличился $\Rightarrow 1$.

Ответ: 3241

4. Сколько рублей потратил абонент на услуги связи в августе?

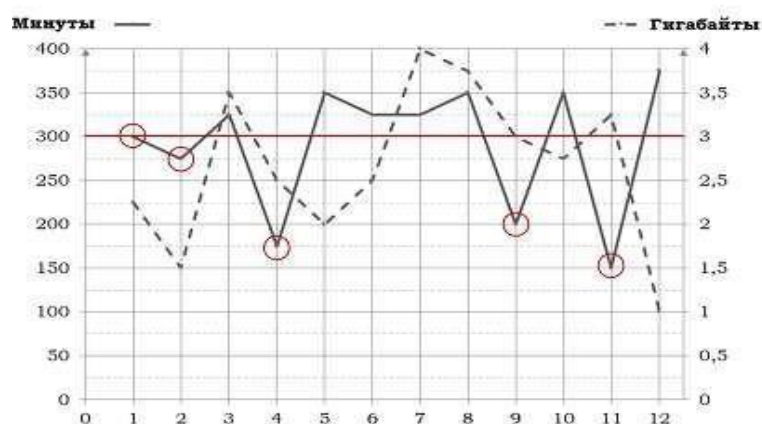


Израсходовано в августе:	Входит в тариф	Сверх пакета
350 минут	300 минут	50 минут
3,75 Гб	3 Гб	0,75 Гб (2 пакета по 0,5 Гб)

Абонент потратил: $360 + 3 \cdot 50 + 80 \cdot 2 = 670$ (руб.)

Ответ: 670

5. Сколько месяцев в 2019 году абонент не превышал лимит по пакету исходящих минут?

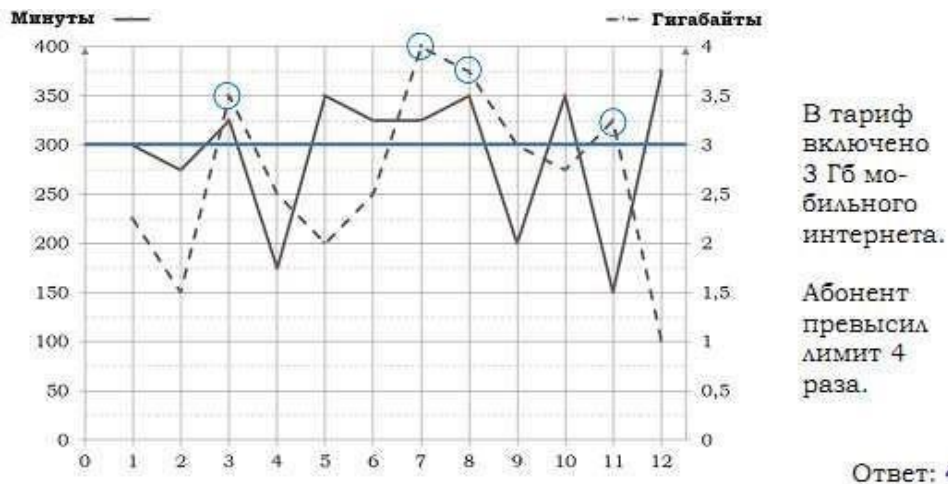


В тариф включено 300 минут исходящих вызовов.

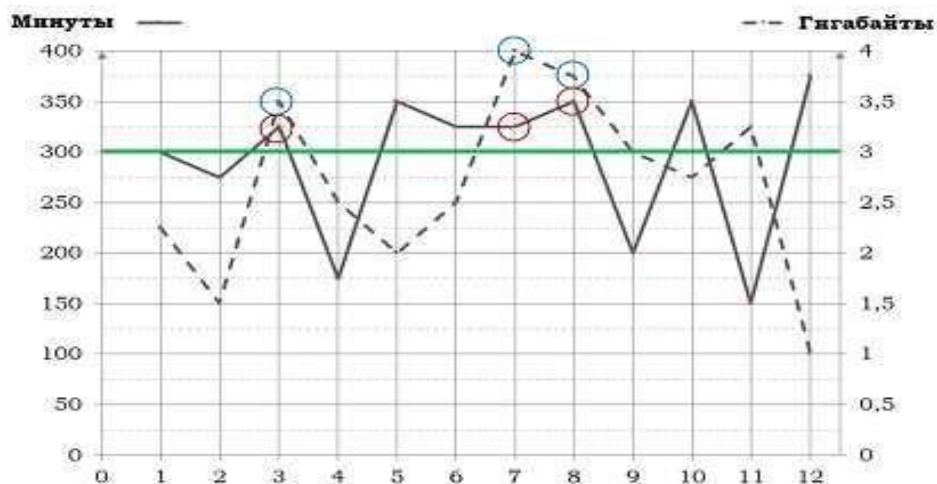
Абонент не превысил лимит 5 раз.

Ответ: 5

6. Сколько месяцев в 2019 году абонент превысил лимит по пакету мобильного интернета?



7. Сколько месяцев в 2019 году абонент превысил лимит и по пакету минут, и по пакету мобильного интернета?



В тариф включено 300 минут исходящих вызовов и 3 Гб мобильного интернета. Абонент превысил лимит и по пакету минут, и по пакету мобильного интернета 3 раза за год.

Ответ: 3

Ресурсы: Е. А. Ширяева (www.time4math.ru) Задачник (ОГЭ 2021)

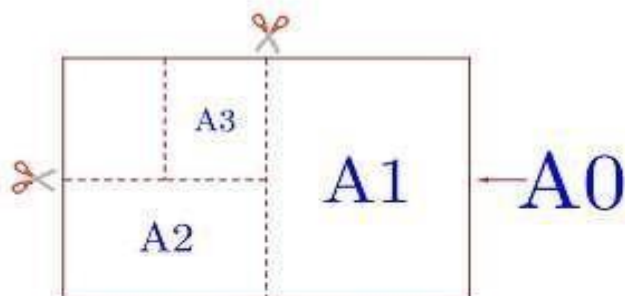
Занятие 5

Практико-ориентированные задачи. Задачи ОГЭ 1-5

«Лист бумаги» (www.fipi.ru)

«Листы бумаги»

Общепринятые форматы листов бумаги обозначают буквой А и цифрой: А0, А1, А2 и так далее. Лист формата А0 имеет форму прямоугольника, площадь которого равна 1 кв. м. Если лист формата А0 разрезать пополам параллельно меньшей стороне, получается два равных листа формата А1. Если лист А1 разрезать так же пополам, получается два листа формата А2. И так далее. Отношение большей стороны к меньшей стороне листа каждого формата одно и то же, поэтому листы всех форматов подобны. Это сделано специально для того, чтобы пропорции текста и его расположение на листе сохранялись при уменьшении или увеличении шрифта при изменении формата листа.



В таблице даны размеры (с точностью до мм) четырёх листов, имеющих форматы А0, А2, А3 и А5.

Номер листа	Длина (мм)	Ширина (мм)
1	210	148
2	594	420
3	1189	841
4	420	297

1. Установите соответствие между форматами и номерами листов бумаги из таблицы. Заполните таблицу, в бланк ответов перенесите последовательность четырёх цифр.

А0	А2	А3	А5

Чем больше цифра формата, тем меньше длина листа. Расставим длины листов в порядке убывания:

А0	А2	А3	А5
1189	594	420	210
3	2	4	1

Ответ: 3241

2. Сколько листов формата А5 получится из одного листа формата А1?



Количество листов удваивается:

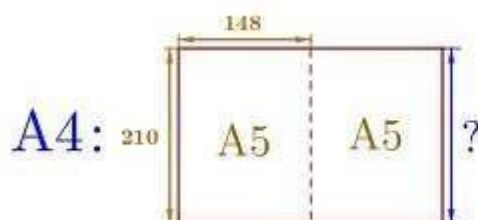
1 лф A1 = 2 лф A2 = 4 лф A3 = 8 лф A4 = **16** лф A5

По формуле:

$$N = 2^{(5-1)} = 2^4 = 16$$

Ответ: 16.

3. Найдите ширину листа бумаги формата A4. Ответ дайте в миллиметрах и округлите до ближайшего целого числа, кратного 10.

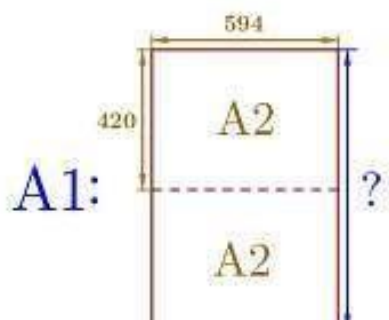


Номер листа	Длина (мм)	Ширина (мм)
1	A5 210	148

Ширина листа формата A4 равна длине листа формата A5.

Ответ: 210.

4. Найдите длину листа бумаги формата A1. Ответ дайте в миллиметрах и округлите до ближайшего целого числа, кратного 10.



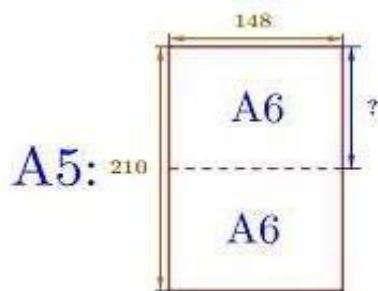
Номер листа	Длина (мм)	Ширина (мм)
2	A2 594	420

Длина листа формата A1 в 2 раза больше ширины листа формата A2: $420 \cdot 2 = 840$ (мм).

Ответ: 840.

Интересно! На самом деле длина листа формата A1 равна 841 мм, чтобы эта неточность не отразилась на правильности ответа, в задаче требуется округлить полученную длину до ближайшего целого числа, кратного 10.

5. Найдите отношение длины большей стороны листа формата A6 к меньшей. Ответ округлите до десятых.



Номер листа	Длина (мм)	Ширина (мм)
1	A5 210	148

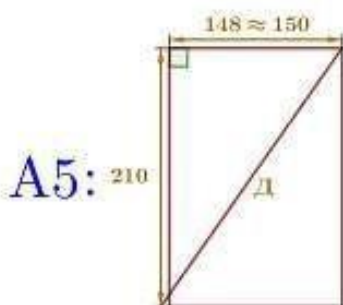
Длина листа формата A6 равна ширине листа формата A5: **148** мм.

Ширина листа формата A6 2 раза меньше длины листа формата A5: $210:2=105$ (мм).

Отношение: $\frac{B}{M} = \frac{148}{105} \approx \frac{150}{105} = \frac{10}{7} \approx 1,429 \approx 1,4$.

Ответ: 1,4.

6. Найдите отношение длины диагонали листа формата A5 к его меньшей стороне. Ответ округлите до десятых.



Номер листа	Длина (мм)	Ширина (мм)
1	A5 210	148≈150

Для упрощения вычислений длину/ширину листа можно округлить.

По теореме Пифагора найдем длину диагонали:

$$Д = \sqrt{210^2 + 150^2} = \sqrt{66600} = \sqrt{666} \cdot \sqrt{100} \approx \sqrt{676} \cdot 10 = 260$$

Меньшая сторона – это **ширина** листа, для формата A5: **150** мм.

Отношение: $\frac{Д}{М} = \frac{260}{150} \approx \frac{26}{15} \approx 1,73 \approx 1,7$.

Ответ: 1,7.

Интересно! Так как ответ во всех заданиях такого типа необходимо будет округлить до десятых, для упрощения вычислений округлите длины сторон до числа кратного 10 (1200; 850; 600; 300; 150) или 5 (105; 75). На правильности ответа это не отразится. Также для упрощения вычислений можно учесть тот факт, что все листы подобны и все отношения (большая сторона к меньшей, меньшая к большей, диагональ к меньшей/большой стороне) будут одинаковыми для всех форматов (1,4/0,7/1,7/1,2).

7. Найдите площадь листа формата A3. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

$$S_{\text{лф}A0} = 1 \text{ м}^2 = 10\,000 \text{ см}^2$$

$$1 \text{ лф } A0 = 2 \text{ лф } A1 = 4 \text{ лф } A2 = 8 \text{ лф } A3$$

$$S_{\text{лф}A3} = \frac{S_{\text{лф}A0}}{8} = \frac{10\,000}{8} = 1\,250 \text{ (см}^2\text{)}$$

Ответ: 1250.

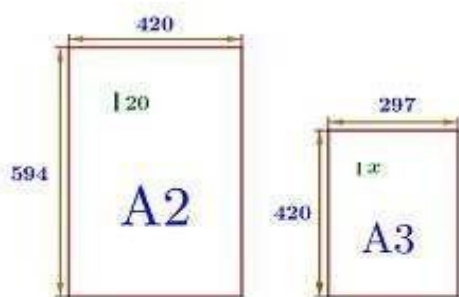
8. Бумагу формата А2 упаковали в пачки по 120 листов. Найдите массу пачки, если масса бумаги площади 1 кв. м равна 180 г. Ответ дайте в граммах.

$$S_{\text{лфА0}} = 1 \text{ м}^2 \Rightarrow m_{\text{лфА0}} = 180 \text{ г}$$

$$1 \text{ лф А0} = 2 \text{ лф А1} = 4 \text{ лф А2} \quad \begin{array}{l} 4 \text{ листа} - 180 \text{ г} \\ 120 \text{ листов} - x \text{ г} \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{4}{120} = \frac{180}{x} \\ x = \frac{120 \cdot 180}{4} = 5400 \text{ (г)} \end{array}$$

Ответ: 5400

9. Размер (высота) типографского шрифта измеряется в пунктах. Один пункт равен $1/72$ дюйма, то есть 0,3528 мм. Текст напечатан шрифтом высотой 20 пунктов на листе формата А2. Какой высоты нужен шрифт (в пунктах), чтобы текст был расположен на листе формата А3 таким же образом? Размер шрифта округляется до целого.



Так как листы подобны, то отношение высот шрифтов будет таким же, как отношение длины (ширины) листов двух рассматриваемых форматов. Можно составить пропорцию как относительно длины, так и ширины:

$$1) \frac{20}{x} = \frac{594}{420} \Rightarrow x = \frac{20 \cdot 420}{594} \approx 14,14 \approx 14$$

$$2) \frac{20}{x} = \frac{420}{297} \Rightarrow x = \frac{20 \cdot 297}{420} \approx 14,14 \approx 14$$

Номер листа	Длина	Ширина	
2	A2 594	420	20
4	A3 420	297	x

Ответ: **14**.

Интересно! Для увеличения шрифта можно использовать коэффициент **1,4**, для уменьшения – **0,7**. Проверяем: $20 \cdot 0,7 = 14$ и $14 \cdot 1,4 = 19,6 \approx 20$.

Ресурсы: Е. А. Ширяева (www.time4math.ru) Задачник (ОГЭ 2021)

«План местности» (www.fipi.ru)

Задание 1. На рисунке изображён план сельской местности. Катя на летних каникулах приезжает в гости к дедушке в деревню Старая (на плане обозначена цифрой 7). В конце каникул дедушка на машине собирается отвезти Катю на автобусную станцию, которая находится в деревне Мишино. Из деревни Старая в деревню Мишино можно проехать по просёлочной дороге мимо реки. Есть другой путь – по шоссе до села Речное, где нужно повернуть под прямым углом направо на другое шоссе, ведущее в Мишино. Третий маршрут проходит по просёлочной дороге мимо пруда до деревни Ивушка, где можно свернуть на шоссе до деревни Мишино. Четвёртый маршрут пролегает по шоссе до села Благое, от Благого до Арбузово по просёлочной дороге мимо конюшни и от Арбузово до Мишино по шоссе. Ещё один маршрут проходит по шоссе до деревни Новая, по просёлочной дороге мимо конюшни до деревни Ивушка и по шоссе от деревни Ивушка до Мишино. Шоссе и просёлочные дороги образуют прямоугольные треугольники.



По шоссе Катя с дедушкой едут со скоростью 40 км/ч, а по просёлочным дорогам – со скоростью 25 км/ч. Расстояние от деревни Старая до деревни Новая равно 18 км, от села Благое до села Речное – 24 км, от деревни Новая до села Благое – 12 км, от села Речное до деревни Ивушка – 16 км, от деревни Ивушка до деревни Арбузово – 6 км, а от деревни Арбузово до деревни Мишино – 30 км.

1.1. Пользуясь описанием, определите, какими цифрами на плане обозначены деревни. Заполните таблицу, в бланк ответов перенесите последовательность четырёх цифр без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Насел. пункты	д. Новая	д. Арбузово	с. Благое	д. Ивушка
Цифры				

Важно! Рекомендуется сразу отметить все населенные пункты. Работаем с текстом.

Текст	Вывод
Катя на летних каникулах приезжает в гости к дедушке в деревню Старая (на плане обозначена цифрой 7).	Деревня Старая обозначена цифрой 7.
Из деревни Старая в деревню Мишино можно проехать по просёлочной дороге мимо реки.	Мимо реки проходит дорога к пункту, отмеченному цифрой 4. Это деревня Мишино.
Есть другой путь – по шоссе до села Речное, где нужно повернуть под прямым углом направо на другое шоссе, ведущее в Мишино.	Единственный пункт, с поворотом под прямым углом обозначен цифрой 1, следовательно, это село Речное.
Третий маршрут проходит по просёлочной дороге мимо пруда до деревни Ивушка, где можно свернуть на шоссе до деревни Мишино.	От деревни Старой проходит только одна дорога мимо пруда, она отмечена цифрой 3. Это деревня Ивушка.
Четвёртый маршрут пролегает по шоссе до села Благое, от Благое до Арбузово по просёлочной дороге мимо конюшни и от Арбузово до Мишино по шоссе.	Мимо конюшни проходит две дороги, но одна из них ведет к деревне Ивушка, следовательно, деревня Арбузово отмечена цифрой 2, а село Благое цифрой 6.
Ещё один маршрут проходит по шоссе до деревни Новая...	Оставшийся пункт – деревня Новая, она отмечена цифрой 5.

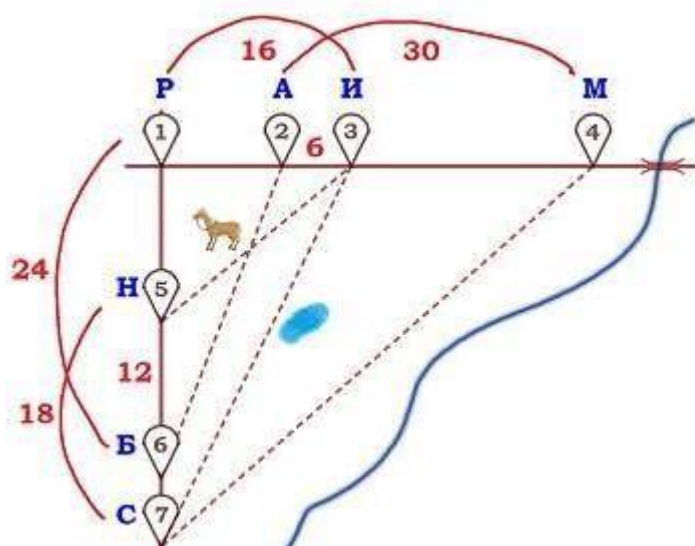
Заполняем таблицу:

Насел. пункты	д. Новая	д. Арбузово	с. Благое	д. Ивушка
Цифры	5	2	6	3

Ответ: 5263

1.2. Найдите расстояние от деревни Ивушка до деревни Мишино по шоссе. Ответ дайте в километрах.

Важно! Рекомендуется сразу отметить длину всех участков дороги между населенными пунктами по шоссе.



Речное – Арбузово:
 $16 - 6 = 10$ (км)

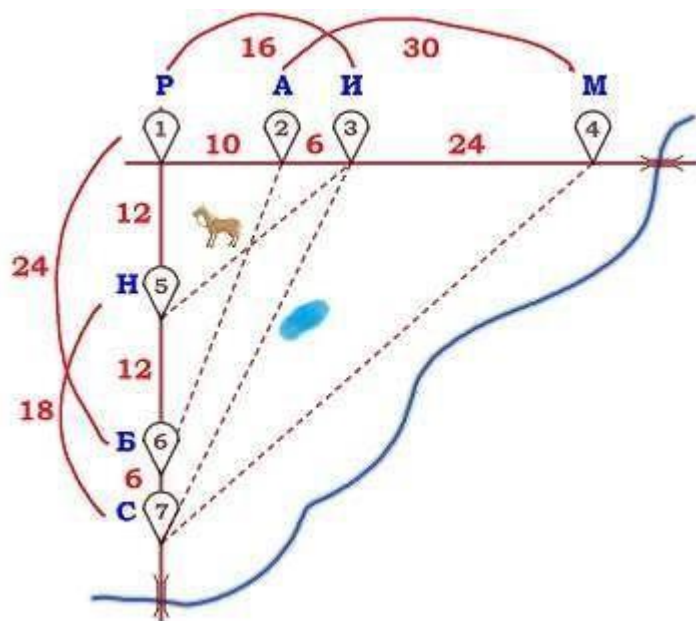
Ивушка – Мишино:
 $30 - 6 = 24$ (км)

Старая – Благое:
 $18 - 12 = 6$ (км)

Новая – Речное:
 $24 - 12 = 12$ (км)

Ответ: 24

Итоговая схема:



1.3. Найдите расстояние от деревни Старая до села Речное по шоссе. Ответ дайте в километрах.

По схеме: $18 + 12 = 30$ (км) или $6 + 24 = 30$ (км), или $6 + 12 + 12 = 30$ (км)

Ответ: 30

1.4. Найдите расстояние от деревни Арбузово до села Благое по прямой. Ответ дайте в километрах.

$S_{Н-И} = 20$ км, $v_{Н-И} = 25$ км/ч, найдем время: $t_{Н-И} = \frac{S}{v} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$ (ч)

3) $S_{И-М} = 24$ км, $v_{И-М} = 40$ км/ч, найдем время: $t_{И-М} = \frac{S}{v} = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}$ (ч)

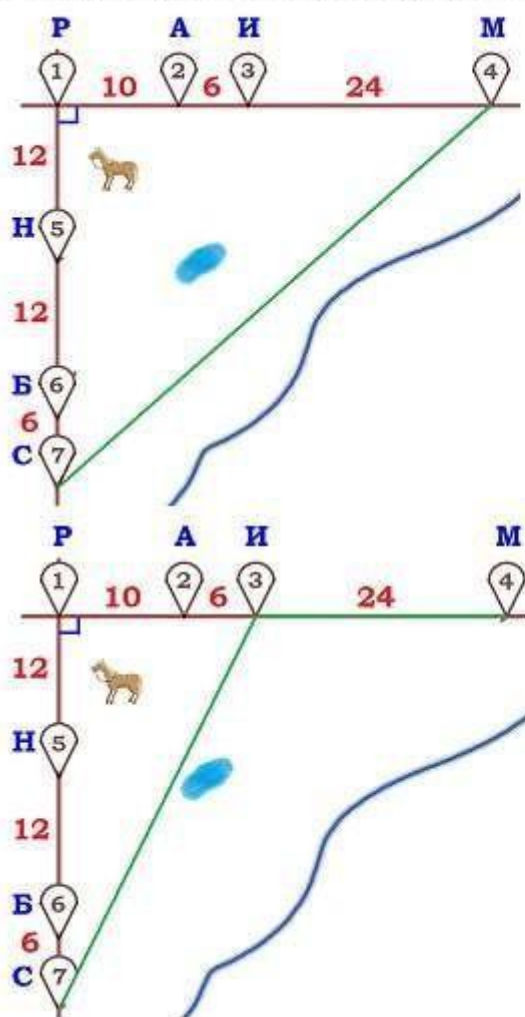
Общее время: $t_{С-Н} + t_{Н-И} + t_{И-М} = \frac{9}{20} + \frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{37}{20}$ (ч)

Переводим в минуты: $\frac{37}{20}$ ч = $\frac{37}{20} \cdot 60$ мин = 111 мин.

Ответ: **111**

1.6. За какое наименьшее количество минут Катя с дедушкой могут добраться из деревни Старая до деревни Мишино?

На плане представлено 5 подходящих маршрутов:



А) Старая – Мишино (напрямик)

Рассмотрим треугольник СРМ:

$\triangle СРМ$ – прямоугольный,

$СР = 6 + 12 + 12 = 30$ (км),

$РМ = 10 + 6 + 24 = 40$ (км)

По теореме Пифагора:

$СМ^2 = 30^2 + 40^2$

$СМ^2 = 2500$

$СМ = 50$ (км)

$S_{С-М} = 50$ км, $v_{С-М} = 25$ км/ч,

найдем время: $t_{С-М} = \frac{S}{v} = \frac{50}{25} = 2$ (ч)

Б) Старая – Ивушка – Мишино
СИ+ИМ

1) Рассмотрим треугольник СРИ:

$\triangle СРИ$ – прямоугольный,

$СР = 6 + 12 + 12 = 30$ (км),

$РИ = 10 + 6 = 16$ (км).

По теореме Пифагора:

$СИ^2 = 30^2 + 16^2$

$СИ^2 = 1156$

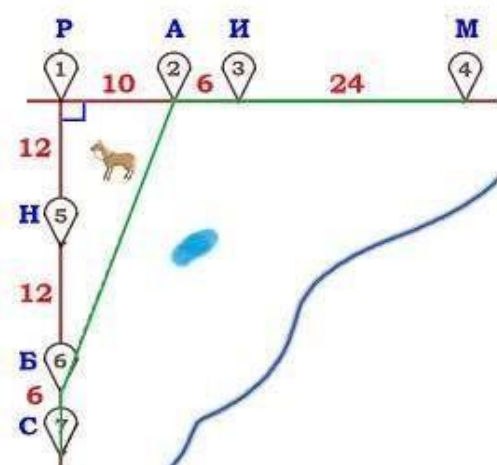
$СИ = 34$ (км)

$S_{С-И} = 34$ км, $v_{С-И} = 25$ км/ч,

найдем время: $t_{С-И} = \frac{S}{v} = \frac{34}{25} = 1\frac{9}{25}$ (ч)

2) $S_{И-М} = 24$ км, $v_{И-М} = 40$ км/ч, найдем время: $t_{И-М} = \frac{S}{v} = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}$ (ч)

Общее время: $t_{С-И} + t_{И-М} = 1\frac{9}{25} + \frac{3}{5} = 1\frac{24}{25}$ (ч)



В) Старая – Благое – Арбузово – Мишино

СБ+БА+АМ

1) $S_{С-Б} = 6$ км, $v_{С-Б} = 40$ км/ч,

найдем время:

$$t_{С-Б} = \frac{S}{v} = \frac{6}{40} = \frac{3}{20} \text{ (ч)}.$$

2) $S_{Б-А} = 26$ км (см. задание 1.4.),

$v_{Б-А} = 25$ км/ч, найдем время:

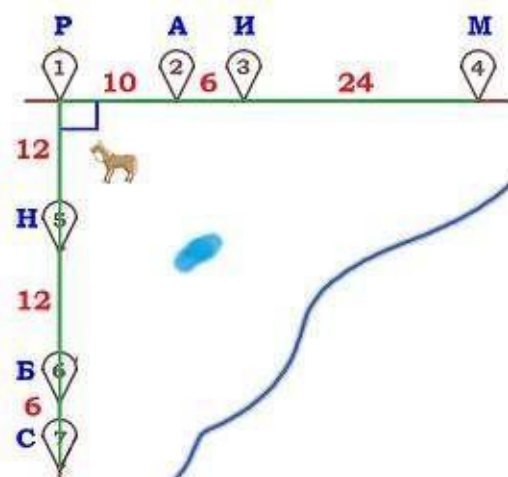
$$t_{Б-А} = \frac{S}{v} = \frac{26}{25} = 1\frac{1}{25} \text{ (ч)}.$$

3) $S_{А-М} = 6 + 24 = 30$ км, $v_{А-М} = 40$ км/ч, найдем время: $t_{А-М} = \frac{S}{v} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$ (ч)

Общее время: $t_{С-Б} + t_{Б-А} + t_{А-М} = \frac{3}{20} + 1\frac{1}{25} + \frac{3}{4} = 1\frac{47}{50}$ (ч)

Г) Старая – Новая – Ивушка – Мишино

Смотрите задание 1.5.: $t_{С-Н} + t_{Н-И} + t_{И-М} = \frac{9}{20} + \frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{37}{20} = 1\frac{17}{20}$ (ч)



Д) Старая – Речное – Мишино

СР+РМ

$S_{С-Р-М} = 6 + 12 + 12 + 10 + 6 + 24 = 70$ км,

$v_{С-Р-М} = 40$ км/ч,

найдем время: $t_{С-Р-М} = \frac{S}{v} = \frac{70}{40} = 1\frac{3}{4}$ (ч)

А) $t_{С-М} = 2$ ч

Б) $t_{С-И} + t_{И-М} = 1\frac{24}{25}$ ч $= 1\frac{96}{100}$ ч

В) $t_{С-Б} + t_{Б-А} + t_{А-М} = 1\frac{47}{50}$ ч $= 1\frac{94}{100}$ ч

Г) $t_{С-Н} + t_{Н-И} + t_{И-М} = 1\frac{17}{20}$ ч $= 1\frac{85}{100}$ ч

Д) $t_{С-Р-М} = 1\frac{3}{4}$ ч $= 1\frac{75}{100}$ ч – наименьшее

Переводим в минуты: $1\frac{3}{4}$ ч $= \frac{7}{4} \cdot 60$ мин $= 105$ мин

Ответ: **105**

Ресурсы: Е. А. Ширяева (www.time4math.ru)

Задачник (ОГЭ 2021)

Занятие 6

Числа и вычисления. Задачи ОГЭ №6

Задача 6 ОГЭ по математике называется «Числа и вычисления». Это действия с обыкновенными и с десятичными дробями. Действия со степенями. Сравнение чисел.

Обыкновенные дроби:

Сложение и вычитание - одинаковые знаменатели (перенос единицы)

$$1) \frac{2}{13} + \frac{8}{13} = \frac{10}{13}$$

$$4) \frac{5}{11} - \frac{4}{11} = \frac{1}{11}$$

$$2) 2\frac{3}{10} + 5 = 7\frac{3}{10}$$

$$5) 5 - 1\frac{8}{13} = 4\frac{13}{13} - 1\frac{8}{13} = 3\frac{5}{13}$$

$$3) 3\frac{5}{9} + 2\frac{7}{9} = 5\frac{12}{9} = 6\frac{3}{9} = 6\frac{1}{3}$$

$$6) 3\frac{2}{9} - 1\frac{5}{9} = 2\frac{11}{9} - 1\frac{5}{9} = 1\frac{6}{9} = 1\frac{2}{3}$$

Сложение и вычитание - разные знаменатели
(привести к общему знаменателю, перенос единицы)

$$7) 7\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = 7\frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} + \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3} = 7\frac{10}{15} + \frac{12}{15} = 7\frac{22}{15} = 8\frac{7}{15}$$

$$8) 6\frac{7}{24} + 2\frac{5}{16} = 6\frac{7 \cdot 2}{24 \cdot 2} + 2\frac{5 \cdot 3}{16 \cdot 3} = 6\frac{14}{48} + 2\frac{15}{48} = 8\frac{29}{48}$$

$$9) \frac{7}{8} - \frac{5}{16} = \frac{7 \cdot 2}{8 \cdot 2} - \frac{5}{16} = \frac{14}{16} - \frac{5}{16} = \frac{9}{16}$$

$$10) 6\frac{7}{12} - 2\frac{5}{8} = 6\frac{7 \cdot 2}{12 \cdot 2} - 2\frac{5 \cdot 3}{8 \cdot 3} = 6\frac{14}{24} - 2\frac{15}{24} = 5\frac{38}{24} - 2\frac{15}{24} = 3\frac{23}{24}$$

Умножение

(перевести дроби в неправильные, записать под общую черту и сократить)

$$11) \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5 \cdot 4}{8 \cdot 7} = \frac{5}{14}$$

$$13) 6\frac{3}{4} \cdot 1\frac{1}{9} = \frac{27}{4} \cdot \frac{10}{9} = \frac{27 \cdot 10}{4 \cdot 9} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$$

$$12) 4\frac{1}{5} \cdot 15 = \frac{21}{5} \cdot \frac{15}{1} = \frac{21 \cdot 15}{5 \cdot 1} = \frac{63}{1} = 63$$

Деление (перевести дроби в неправильные, записать под одну черту
[перевернув вторую дробь] и сократить)

$$14) \frac{3}{4} : \frac{21}{40} = \frac{3}{4} \cdot \frac{40}{21} = \frac{3 \cdot 40}{4 \cdot 21} = \frac{10}{7} = 1\frac{3}{7}$$

$$16) 2\frac{7}{16} : 3\frac{1}{4} = \frac{39}{16} : \frac{13}{4} = \frac{39}{16} \cdot \frac{4}{13} = \frac{39 \cdot 4}{16 \cdot 13} = \frac{3}{4}$$

$$15) 3\frac{3}{5} : 4 = \frac{18}{5} : \frac{4}{1} = \frac{18}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{18 \cdot 1}{5 \cdot 4} = \frac{9}{10}$$

Степень числа:

$$a^2 = a \cdot a$$

$$a^3 = a \cdot a \cdot a$$

$$a^0 = 1$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n$$

$$2^4 \cdot 2^3 = 2^{4+3} = 2^7$$

$$(10^{-2})^{-3} = 10^6$$

$$(3x)^3 = 3^3 \cdot x^3 = 27x^3$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$(10)^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0,001$$

$$(-10)^2 = (-10) \cdot (-10) = 100$$

$$(-4)^3 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = -64$$

Десятичные дроби:

Сложение и вычитание (к общему знаменателю, запятая под запятой)

$$1) 63,7 + 2,031 = 65,731 \quad \begin{array}{r} 63,700 \\ + 2,031 \\ \hline 65,731 \end{array}$$

$$3) 9 - 3,16 = 5,84 \quad \begin{array}{r} 9,00 \\ - 3,16 \\ \hline 5,84 \end{array}$$

$$2) 6,78 + 12 = 18,78 \quad \begin{array}{r} 6,78 \\ + 12,00 \\ \hline 18,78 \end{array}$$

$$4) 7,8 - 3,102 = 4,698 \quad \begin{array}{r} 7,800 \\ - 3,102 \\ \hline 4,698 \end{array}$$

Умножение (сколько знаков после запятой в обоих множителях)

$$5) 0,51 \cdot 0,9 = 0,459 \quad \begin{array}{r} 0,51 \\ \times 0,9 \\ \hline 0,459 \end{array}$$

$$6) 170 \cdot 0,04 = 6,8 \quad \begin{array}{r} 170 \\ \times 0,04 \\ \hline 6,80 \end{array}$$

Деление на число (десятичные «управляют» запятой)

$$7) 0,1349 : 19 = 0,0071 \quad \begin{array}{r} 0,1349 \overline{) 19} \\ \underline{133} \\ 19 \\ \underline{19} \\ 0 \end{array}$$

$$8) 3 : 4 = 0,75 \quad \begin{array}{r} 3,0 \overline{) 4} \\ \underline{28} \\ 20 \\ \underline{20} \\ 0 \end{array}$$

Деление на десятичное число (делитель – натуральное число)

$$9) 75,3 : 1,5 = 753 : 15 = 50,2 \quad \begin{array}{r} 753,0 \overline{) 15} \\ \underline{75} \\ 30 \\ \underline{30} \\ 0 \end{array} \quad 10) 10 : 0,125 = 10000 : 125 = 80$$

$$\begin{array}{r} 10000 \overline{) 125} \\ \underline{1000} \\ 25 \\ \underline{25} \\ 0 \end{array}$$

Умножение и деление (перенос запятой: увеличение $\Rightarrow$, уменьшение $\Leftarrow$)

$$11) 0,9 \cdot 1000 = 900 \quad 0,9 \cdot 100 = 90,0 = 90 \text{ (больше)}$$

$$12) 15 \cdot 0,01 = 0,15 \quad 15 \cdot 0,01 = 0,15 \text{ (меньше)}$$

$$13) 19,6 : 100 = 0,196 \quad 19,6 : 100 = 0,196 \text{ (меньше)}$$

$$14) 17,2 : 0,1 = 172 : 1 = 172 \quad 17,2 : 0,1 = 172,0 = 172 \text{ (больше)}$$

Рациональные числа:

Сложение и вычитание

1) одинаковые знаки [складываем модули, знак сохраняем]

$$5 + 3 = 8 \quad -6 - 4 = (-6) + (-4) = -10$$

2) разные знаки [вычитаем модули, знак – большего по модулю числа]

$$-2 + 8 = (-2) + 8 = +6 = 6$$

$$9 + (-11) = -2$$

$$-12 + 3 = (-12) + 3 = -9$$

$$7 + (-3) = +4 = 4$$

$$3) a + (-b) = a - b$$

$$-20 - (-6) - 8 + (-12) = -20 + 6 - 8 - 12 =$$

$$a - (-b) = a + b$$

$$= (-20) + 6 + (-8) + (-12) = -34$$

Умножение

1) одинаковые знаки [умножаем модули] $5 \cdot 3 = 15 \quad -6 \cdot (-4) = 6 \cdot 4 = 24$

2) разные знаки [умножаем модули, сохраняем знак «-»]

$$-2 \cdot 8 = -(2 \cdot 8) = -16 \quad 9 \cdot (-11) = -(9 \cdot 11) = -99$$

Приступим к решению задач.

Пример 1. Найдите значение выражения $\frac{0,8}{1 - \frac{1}{9}}$.

Решение. Вспоминаем, что при вычитании дробей нужно их привести к общему знаменателю, а при делении дробей первую из них умножаем на перевёрнутую вторую.

Посчитаем, чему равен знаменатель.

$$1 - \frac{1}{9} = \frac{9}{9} - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

Получим:

$$\frac{0,8}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{8}{10} : \frac{8}{9} = \frac{8}{10} \cdot \frac{9}{8} = \frac{9}{10} = 0,9.$$

Ответ: 0,9.

Пример 2. Соотнесите обыкновенные дроби с равными им десятичными дробями.

А. $\frac{5}{8}$	Б. $\frac{3}{25}$	В. $\frac{1}{2}$	Г. $\frac{1}{50}$
1) 0,5	2) 0,02	3) 0,12	4) 0,625

Запишите в ответ цифры, расположив их в порядке, соответствующем буквам:

Каждую из данных обыкновенных дробей можно представить в виде десятичной, например, используя деление в столбик.

Замечание 1. Преобразование обыкновенных дробей в десятичные можно произвести и без деления в столбик. Т. к. любая десятичная дробь записывается как обыкновенная со знаменателем 10, 100, 1000 и т. д., то данные обыкновенные дроби можно «доделать» до десятичных. Для этого используем основное свойство дроби: *дробь не изменится, если её числитель и знаменатель домножить на одно и тоже число.*

$$\frac{5}{8} = \frac{5}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{625}{1000} = 0,625$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{5}{10} = 0,5$$

$$\frac{3}{25} = \frac{3}{5 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2} = \frac{12}{100} = 0,12$$

$$\frac{1}{50} = \frac{1}{10 \cdot 5} = \frac{1 \cdot 2}{10 \cdot 5 \cdot 2} = \frac{2}{100} = 0,02$$

Замечание 2. В этой задаче можно было, наоборот, преобразовывать заданные десятичные дроби в обыкновенные путём упрощения, т. е. сокращения числителя и знаменателя.

$$0,5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \quad (\text{сократили на } 5)$$

$$0,02 = \frac{2}{100} = \frac{1}{50} \quad (\text{сократили на } 2)$$

$$0,12 = \frac{12}{100} = \frac{3}{25} \quad (\text{сократили на } 4)$$

$$0,625 = \frac{625}{1000} = \frac{125}{200} = \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$$

(сократили последовательно три раза на 5)

Реши сам

1. Найдите значение выражения $\frac{7,2 - 6,1}{2,2}$.
2. Найдите значение выражения $\frac{1,2}{6,7 - 7,3}$.
3. Найдите значение выражения $\frac{9}{4,5 \cdot 2,5}$.
4. Найдите значение выражения $0,9 \cdot (-10)^2 - 120$.
5. Найдите значение выражения $(6 \cdot 10^2)^3 \cdot (13 \cdot 10^{-5})$.
6. Найдите значение выражения $(2 \cdot 10^2)^4 \cdot (19 \cdot 10^{-6})$.
7. Найдите значение выражения $\frac{1}{\frac{1}{72} - \frac{1}{99}}$.
8. Найдите значение выражения $\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{6}\right) \cdot 3$.
9. Найдите значение выражения $\left(1\frac{11}{16} - 3\frac{7}{8}\right) \cdot 4$.
10. Найдите значение выражения $9 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 - 19 \cdot \frac{1}{9}$.

Выбирайте любой способ. Здесь важен правильный результат!

Для выполнения следующих заданий нам потребуются свойства степеней.

Пример 3. Найдите значение выражения $(16 \cdot 10^{-2})^2 \cdot (13 \cdot 10^4)$.

Решение. Вычислим, используя свойства степеней:

$$(16 \cdot 10^{-2})^2 \cdot (13 \cdot 10^4) = 16^2 \cdot (10^{-2})^2 \cdot 13 \cdot 10^4 = 256 \cdot 13 \cdot (10^{-4} \cdot 10^4) = 3\,328 \cdot 10^0 = 3328.$$

Ответ: 3328.

Пример 4. Найдите значение выражения $5 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2} + 4 \cdot 10^{-4}$.

Решение. Вычислим, используя свойства степеней:

$$\begin{aligned} 5 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2} + 4 \cdot 10^{-4} &= 5 \cdot \frac{1}{10^1} + 6 \cdot \frac{1}{10^2} + 4 \cdot \frac{1}{10^4} = \\ &= 5 \cdot 0,1 + 6 \cdot 0,01 + 4 \cdot 0,0001 = 0,5 + 0,06 + 0,0004 = 0,5604. \end{aligned}$$

Ответ: 0,5604.

Пример 5. Найдите значение выражения $\frac{3^8 \cdot 3^5}{3^9}$.

Решение. Вычислим, используя свойства степеней:

$$\frac{3^8 \cdot 3^5}{3^9} = \frac{3^{8+5}}{3^9} = \frac{3^{13}}{3^9} = 3^{13-9} = 3^4 = 81.$$

Ответ: 81.

Реши сам

1. Найдите значение выражения

$$4^{-6} \cdot (4^3)^3.$$

2. Найдите значение выражения

$$216 \cdot 6^{-2}.$$

3. Найдите значение выражения

$$\frac{(5^{-3})^6}{5^{-19}}.$$

4. Найдите значение выражения

$$\frac{3^{15-4^{18}}}{12^{14}}.$$

5. Найдите значение выражения

$$\frac{4^6}{8^3}.$$

1. Найдите значение выражения $\frac{24^4}{3^2 \cdot 8^3}.$

2. Найдите значение выражения $4^{-10} \cdot (4^3)^4?$

3. Найдите значение выражения $(1,3 \cdot 10^{-3})(2 \cdot 10^{-2}).$

4. Найдите значение выражения $(1,7 \cdot 10^{-5})(2 \cdot 10^{-2}).$

5. Вычислите: $\frac{7^{-7} \cdot 7^{-8}}{7^{-13}}.$

Используемый ресурс:

1. Яценко И. В., Шестаков С. А. ОГЭ по математике от А до Я. Модульный курс. Алгебра.—М.: МЦНМО, 2019.—224 с.

2. Е. А. Ширяева (www.time4math.ru) Задачник (ОГЭ 2021)

3. СДАМ ГИА: РЕШУ ОГЭ Образовательный портал для подготовки к экзаменам Математика

Занятие 7

Числовые неравенства, координатная прямая. Задачи ОГЭ №7

Задание 7 ОГЭ по математике представляет собой задачу на взаимное расположение чисел на числовой (координатной) прямой, их сравнение и оценку. Рассмотрим несколько типичных примеров.

Неравенства

1. О числах a и b известно, что $a > b$. Среди приведенных ниже неравенств выберите верные:

В ответе укажите номер правильного варианта.

- 1) $a - b < -3$ 2) $b - a > 1$ 3) $b - a < 2$ 4) Верно 1, 2 и 3

Ответ: 3

2. На координатной прямой изображены числа a и c . Какое из следующих неравенств неверно?



- 1) $a - 1 > c - 1$ 2) $-a < -c$ 3) $\frac{a}{6} < \frac{c}{6}$ 4) $a + 3 > c + 1$

Ответ: 3

3. Какое из следующих неравенств не следует из неравенства $y - x > z$?

В ответе укажите номер правильного варианта.

- 1) $y > z + x$ 2) $y - x - z < 0$ 3) $z + x - y < 0$ 4) $y - z > x$

Ответ: 2

4. Известно, что $a > b > 0$. Какое из указанных утверждений верно?

В ответе укажите номер правильного варианта.

- 1) $2a + 1 < 0$ 2) $-a > -b$ 3) $2b > 2a$ 4) $1 - a < 1 - b$

Ответ: 4

5. На координатной прямой отмечено число a . Какое из утверждений относительно этого числа является верным?

В ответе укажите номер правильного варианта.

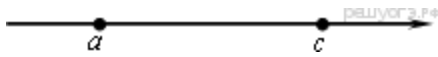


- 1) $a + 4 > 0$ 2) $a + 5 < 0$ 3) $2 - a > 0$ 4) $3 - a < 0$

Ответ: 3

6. На координатной прямой изображены числа a и c . Какое из следующих неравенств неверно?

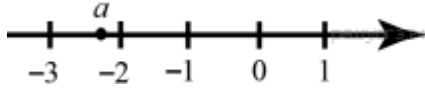
В ответе укажите номер правильного варианта.



- 1) $c + 24 > a + 21$ 2) $c - 39 > a - 40$ 3) $\frac{c}{3} < \frac{a}{3}$ 4) $-c < -a$

Ответ: 3

7. На координатной прямой отмечено число a .



Какое из утверждений относительно этого числа является верным?
В ответе укажите номер правильного варианта.

- 1) $-a < 2$ 2) $-1 - a > 0$ 3) $\frac{1}{a} > 0$ 4) $a + 3 < 0$

Ответ: 2

8. На координатной прямой отмечено число a .

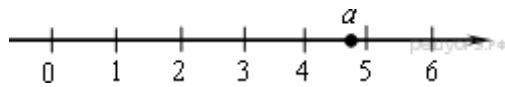


Какое из утверждений относительно этого числа является верным?
В ответе укажите номер правильного варианта.

- 1) $-a < 1$ 2) $-2 - a > 0$ 3) $\frac{1}{a} < 0$ 4) $a + 4 < 0$

Ответ: 3

9. На координатной прямой отмечено число a .

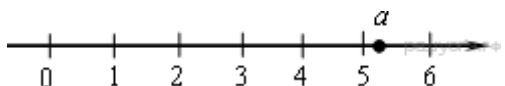


Какое из утверждений относительно этого числа является верным?
В ответе укажите номер правильного варианта.

- 1) $-a > -6$ 2) $5 - a < 0$ 3) $\frac{1}{a} < 0$ 4) $a - 7 > 0$

Ответ: 1

10. На координатной прямой отмечено число a .



Какое из утверждений относительно этого числа является верным?
В ответе укажите номер правильного варианта.

- 1) $-a > -5$ 2) $6 - a < 0$ 3) $\frac{1}{a} < 0$ 4) $a - 3 > 0$

Ответ: 4

Сравнение чисел

1. Сравните числа x и y , если $x = (2,2 \cdot 10^{-2}) \cdot (3 \cdot 10^{-1})$, $y = 0,007$. В ответ запишите значение меньшего из чисел.

Ответ: 0,0066

2. О числах a , b , c и d известно, что $a < b$, $b = c$, $d > c$. Сравните числа d и a .

В ответе укажите номер правильного варианта.

- 1) $d = a$ 2) $d > a$ 3) $d < a$ 4) Сравнить невозможно

Ответ: 2

3. Известно, что $0 < a < 1$. Выберите наименьшее из чисел.

В ответе укажите номер правильного варианта.

- 1) a^2 2) a^3 3) $-a$ 4) $\frac{1}{a}$

Ответ: 3

4. Известно, что $a < b < 0$. Выберите наименьшее из чисел.

В ответе укажите номер правильного варианта.

- 1) $a - 1$ 2) $b - 1$ 3) ab 4) $-b$

Ответ: 1

5. Числа a и b отмечены точками на координатной прямой. Расположите в

порядке возрастания числа $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ и 1.

В ответе укажите номер правильного варианта.



- 1) $\frac{1}{a}$; 1; $\frac{1}{b}$ 2) $\frac{1}{b}$; 1; $\frac{1}{a}$ 3) $\frac{1}{a}$; $\frac{1}{b}$; 1 4) 1; $\frac{1}{b}$; $\frac{1}{a}$

Ответ: 1

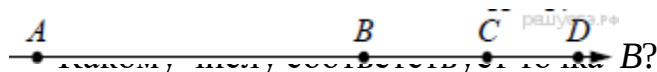
6. Какому из данных промежутков принадлежит число $\frac{5}{9}$?

В ответе укажите номер правильного варианта.

- 1) $[0,5;0,6]$ 2) $[0,6;0,7]$ 3) $[0,7;0,8]$ 4) $[0,8;0,9]$

Ответ: 1

7. На координатной прямой точками отмечены числа $\frac{6}{13}$; $\frac{8}{17}$; 0,42; 0,45



- 1) $\frac{6}{13}$ 2) $\frac{8}{17}$ 3) 0,42 4) 0,45

Ответ: 4

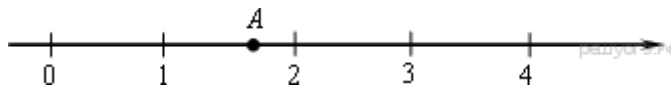
8. Какое из данных ниже чисел принадлежит отрезку $[3; 4]$?

- 1) $\frac{45}{19}$ 2) $\frac{52}{19}$ 3) $\frac{68}{19}$ 4) $\frac{77}{19}$

Ответ: 3

Числа на прямой

1. Какое из чисел отмечено на координатной прямой точкой A?

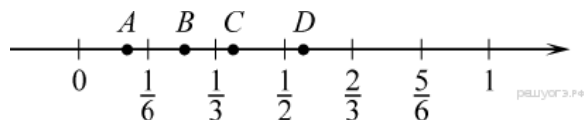


В ответе укажите номер правильного варианта.

- 1) $\sqrt{2}$ 2) $\sqrt{3}$ 3) $\sqrt{7}$ 4) $\sqrt{11}$

Ответ: 2

2. Одна из точек, отмеченных на координатной прямой, соответствует числу $\frac{3}{8}$. Какая это точка?



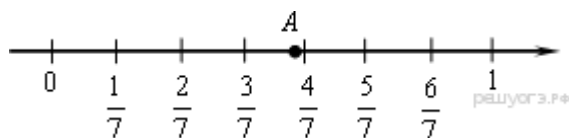
В ответе укажите номер правильного варианта.

- 1) A 2) B 3) C 4) D

Ответ: 3

3.

Одно из чисел $\frac{5}{6}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{5}{12}$ отмечено на координатной прямой точкой A. Укажите это число.

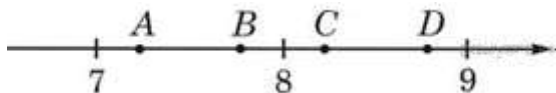


В ответе укажите номер правильного варианта.

- 1) $\frac{5}{6}$ 2) $\frac{5}{7}$ 3) $\frac{5}{9}$ 4) $\frac{5}{12}$

Ответ: 3

4. Одна из точек, отмеченных на координатной прямой, соответствует числу $\sqrt{77}$.



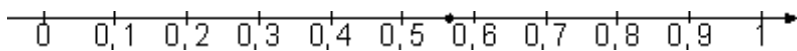
Какая это точка?

В ответе укажите номер правильного варианта.

- 1) точка A 2) точка B 3) точка C 4) точка D

Ответ: 4

5. Какому из следующих чисел соответствует точка, отмеченная на координатной прямой?



В ответе укажите номер правильного варианта.

- 1) $\frac{10}{23}$ 2) $\frac{12}{23}$ 3) $\frac{13}{23}$ 4) $\frac{14}{23}$

Ответ: 3

Выбор верного или неверного утверждения

1.

Известно, что $a > b > c$. Какое из следующих чисел отрицательно?

В ответе укажите номер правильного варианта.

- 1) $a - b$ 2) $a - c$ 3) $b - c$ 4) $c - b$

Ответ: 4

2. Какое из следующих чисел заключено между числами $\frac{1}{6}$ и $\frac{1}{4}$?

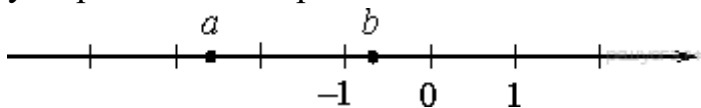
В ответе укажите номер правильного варианта.

- 1) 0,1 2) 0,2 3) 0,3 4) 0,4

Ответ: 2

3.

На координатной прямой отмечены числа a и b . Какое из следующих утверждений неверно?



- 1) $a + b < 0$ 2) $-2 < b - 1 < -1$ 3) $a^2 b < 0$ 4) $-a < 0$

Ответ: 4

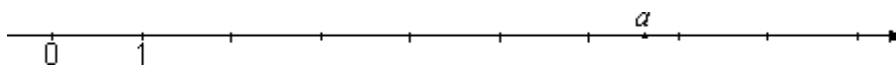
4. Какое из приведенных ниже неравенств является верным при любых значениях a и b , удовлетворяющих условию $a > b$?

В ответе укажите номер правильного варианта.

- 1) $b - a < -2$ 2) $a - b > -1$ 3) $a - b < 3$ 4) $b - a > -3$

Ответ: 2

5. На координатной прямой отмечено число a .



Из следующих утверждений выберите верное:
В ответе укажите номер правильного варианта.

1) $(a - 6)^2 > 1$ 2) $(a - 7)^2 > 1$ 3) $a^2 > 36$ 4) $a^2 > 49$
Ответ: 3

Используемый ресурс:

1. Яценко И. В., Шестаков С. А. ОГЭ по математике от А до Я. Модульный курс. Алгебра.—М.: МЦНМО, 2019.—224 с.
2. Е. А. Ширяева (www.time4math.ru) Задачник (ОГЭ 2021)
3. СДАМ ГИА: РЕШУ ОГЭ Образовательный портал для подготовки к экзаменам Математика

Занятие 8

Числа, вычисления и алгебраические выражения. Задачи ОГЭ №8

Задание 8 ОГЭ по математике продолжает линию заданий 6 и 7 и является задачей на преобразование числовых и буквенных выражений и вычисление их значений. При этом задачи открытого банка по этой позиции варианта ОГЭ можно разделить на две чётко разграниченные группы: задачи на действия с целыми степенями и задачи на действия с корнями.

Таблица квадратов

Десятки	Единицы									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Иррациональные числа и выражения

Рациональные числа – числа, которые можно представить виде дроби $\frac{m}{n}$ ($n \neq 0$), где m – целое число, а n – натуральное число (целые числа + дроби).

Примеры: $\frac{2}{7}$; -9 ; 0 ; $0,11$; 3 ; $-8\frac{1}{4}$...

Иррациональные числа – числа, которые не являются рациональными.

Примеры: $\sqrt{2}$; $-\sqrt{6}$; $\sqrt{14}-11$; $\frac{\sqrt{3}}{3}$; π ; $-\frac{7+\sqrt{5}}{2}$...

Сравнение:

1) 8 и $3\sqrt{7}$

$\sqrt{64} > \sqrt{9\sqrt{7}}$

$\sqrt{64} > \sqrt{63} \Rightarrow 8 > 3\sqrt{7}$

Сложение и вычитание:

2) $\sqrt{11} + \sqrt{11} = 2\sqrt{11}$

3) $6\sqrt{7} - \sqrt{7} = 5\sqrt{7}$

4) $2\sqrt{a} - \sqrt{b} - 4\sqrt{b} + 13\sqrt{a} = 15\sqrt{a} - 5\sqrt{b}$

Умножение и деление (свойства):

5) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a, a \geq 0$ $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5$

6) $\sqrt{a^2} = |a|$ $\sqrt{(-10)^2} = |-10| = 10$ $\sqrt{(3\sqrt{7}-8)^2} = |3\sqrt{7}-8| = 8-3\sqrt{7}$

7) $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ $\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

$\sqrt{a} \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ $7\sqrt{2} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{49 \cdot 2} = \sqrt{98}$

8) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{48}{3}} = \sqrt{16} = 4$

Формулы сокращенного умножения (ФСУ):

$$\begin{aligned}(a-b)(a+b) &= a^2 - b^2 & (a \pm b)^2 &= a^2 \pm 2ab + b^2 \\ a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b) & a^2 \pm 2ab + b^2 &= (a \pm b)^2\end{aligned}$$

$$9) (2\sqrt{3} - \sqrt{5})(2\sqrt{3} + \sqrt{5}) = (2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2 = 4 \cdot 3 - 5 = 7$$

$$10) (5 - 2\sqrt{6})^2 = 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 2\sqrt{6} + (2\sqrt{6})^2 = 25 - 20\sqrt{6} + 4 \cdot 6 = 49 - 20\sqrt{6}$$

Иррациональность в знаменателе:

$$11) \frac{2}{\sqrt{3}} \stackrel{(\cdot \sqrt{3})}{=} \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$12) \frac{1}{4 - \sqrt{5}} \stackrel{(\cdot (4 + \sqrt{5}))}{=} \frac{4 + \sqrt{5}}{(4 - \sqrt{5})(4 + \sqrt{5})} = \frac{4 + \sqrt{5}}{4^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{4 + \sqrt{5}}{16 - 5} = \frac{4 + \sqrt{5}}{11}$$

Свойства степеней:

$$\underline{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$$

$$13) 5 \cdot 5^2 = 5^3 = 125$$

$$14) 8^5 \cdot 8^{-3} = 8^2 = 64$$

$$\underline{\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}}$$

$$15) \frac{6^7}{6^3} = 6^{7-3} = 6^4 = 216$$

$$16) \frac{2^{-5}}{2^{-12}} = 2^{-5-(-12)} = 2^7 = 128$$

$$\underline{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$$

$$17) (2^{-2})^4 = 2^{-8} = \frac{1}{2^8} = \frac{1}{256}$$

$$18) 9^3 = (3^2)^3 = 3^6 = 729$$

$$\underline{(ab)^n = a^n \cdot b^n}$$

$$19) (2\sqrt{3})^2 = 2^2 \cdot (\sqrt{3})^2 = 4 \cdot 3 = 12$$

$$20) 35^6 = (5 \cdot 7)^6 = 5^6 \cdot 7^6$$

$$\underline{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$$

$$21) \left(\frac{4}{9}\right)^3 = \frac{4^3}{9^3} = \frac{64}{729}$$

$$\underline{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

$$22) 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$$

$$23) \frac{1}{3^{-2}} = 3^2 = 9$$

$$\underline{\frac{1}{a^{-n}} = a^n}$$

$$24) \frac{2^{-3}}{3^{-4}} = \frac{3^4}{2^3} = \frac{81}{8} = 10\frac{1}{8}$$

Для выполнения следующих заданий нам потребуются свойства степеней.

Пример 3. Найдите значение выражения $(16 \cdot 10^{-2})^2 \cdot (13 \cdot 10^4)$.

Решение. Вычислим, используя свойства степеней:

$$\begin{aligned}(16 \cdot 10^{-2})^2 \cdot (13 \cdot 10^4) &= 16^2 \cdot (10^{-2})^2 \cdot 13 \cdot 10^4 = 256 \cdot 13 \cdot (10^{-4} \cdot \\ 10^4) &= 3\,328 \cdot 10^0 = 3328.\end{aligned}$$

Ответ: 3328.

Пример 4. Найдите значение выражения $5 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2} + 4 \cdot 10^{-4}$.

Решение. Вычислим, используя свойства степеней:

$$\begin{aligned} 5 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2} + 4 \cdot 10^{-4} &= 5 \cdot \frac{1}{10^1} + 6 \cdot \frac{1}{10^2} + 4 \cdot \frac{1}{10^4} = \\ &= 5 \cdot 0,1 + 6 \cdot 0,01 + 4 \cdot 0,0001 = 0,5 + 0,06 + 0,0004 = 0,5604. \end{aligned}$$

Ответ: 0,5604.

Пример 5. Найдите значение выражения $\frac{3^8 \cdot 3^5}{3^9}$.

Решение. Вычислим, используя свойства степеней:

$$\frac{3^8 \cdot 3^5}{3^9} = \frac{3^{8+5}}{3^9} = \frac{3^{13}}{3^9} = 3^{13-9} = 3^4 = 81.$$

Ответ: 81.

Реши сам.

1. Найдите значение выражения $\frac{24^4}{3^2 \cdot 8^3}$.

2. Найдите значение выражения $4^{-10} \cdot (4^3)^4$?

3. Найдите значение выражения $(1,3 \cdot 10^{-3})(2 \cdot 10^{-2})$.

4. Найдите значение выражения $(1,7 \cdot 10^{-5})(2 \cdot 10^{-2})$.

5. Вычислите: $\frac{7^{-7} \cdot 7^{-8}}{7^{-13}}$.

6. Найдите значение выражения $\frac{(2\sqrt{6})^2}{36}$.

7. Найдите значение выражения $5\sqrt{11} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{22}$

8. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{200}}{\sqrt{8}}$.

9. Чему равно значение выражения $(3\sqrt{2})^2$?

10. Найдите значение выражения $\sqrt{11 \cdot 2^2} \cdot \sqrt{11 \cdot 3^4}$.

11. Найдите значение выражения $\sqrt{18 \cdot 80} \cdot \sqrt{30}$.

12. Найдите значение выражения $\sqrt{90 \cdot 30 \cdot 3}$.

13. Найдите значение выражения $(\sqrt{23} + 1)^2$.

14. Найдите значение выражения $(\sqrt{85} - 1)^2$.

15. Какое из данных ниже чисел является значением выражения $\frac{6}{(2\sqrt{3})^2}$

16. Найдите значение выражения $(\sqrt{11} - 3)(\sqrt{11} + 3)$.

17. Найдите значение выражения $\frac{1}{\sqrt{5} - 2} - \frac{1}{\sqrt{5} + 2}$.

18. Найдите значение выражения $(\sqrt{18} + \sqrt{2}) \cdot \sqrt{2}$.

Используемый ресурс:

1. Яценко И. В., Шестаков С. А. ОГЭ по математике от А до Я. Модульный курс. Алгебра.—М.: МЦНМО, 2019.—224 с.

2. Е. А. Ширяева (www.time4math.ru) Задачник (ОГЭ 2021)

3. СДАМ ГИА: РЕШУ ОГЭ Образовательный портал для подготовки к экзаменам Математика

Занятие 9

Уравнения, системы уравнений. Задачи ОГЭ №9

Линейные уравнения.

Задание 9 ОГЭ по математике представляет собой несложное рациональное уравнение—линейное или квадратное либо сводящееся в одно-два действия к одному из них целое или дробно-линейное уравнение. Для того чтобы успешно справиться с подобным заданием на ОГЭ, достаточно уметь решать линейные и квадратные уравнения, помнить правило переноса слагаемого из одной части уравнения в другую (знак этого слагаемого меняется на противоположный), обладать определёнными вычислительными навыками, связанными с арифметическими действиями над целыми числами и дробями.

Уравнения

Уравнение – равенство, содержащее неизвестное число, обозначенное буквой, значение которого надо найти.

Корень уравнения – значение неизвестного, при подстановке которого уравнение обращается в верное числовое равенство.

Решить уравнение – найти все его корни или установить, что их нет.

Линейные уравнения

Общий вид:

$$ax=b$$

Решение:

А) если $a \neq 0$, то $x=b:a=\frac{b}{a}$;

Б) если $a=b=0$, то x – любое число;

В) если $a \neq 0, b=0$, то нет корней.

Пример 1. Найдите корень уравнения:

а) $10x=-80$,

$$10x=-80$$

$$x=-80:10$$

$$x=-8$$

б) $7x=0$,

$$7x=0$$

$$x=0:7$$

$$x=0$$

в) $40x=3$.

$$40x=3$$

$$x=3:40$$

$$x=\frac{3}{40}$$

Уравнения, сводящиеся к линейным

Теорема 1. Если к обеим частям данного уравнения прибавить (или из обеих частей вычесть) одно и то же число, то получится уравнение, имеющее те же корни, что и данное.

Следствие. Если какое-нибудь слагаемое перенести из одной части уравнения в другую, изменив при этом его знак на противоположный, то получим уравнение, имеющее те же корни, что и данное.

Теорема 2. Если обе части уравнения умножить (или разделить) на одно и то же отличное от нуля число, то получим уравнение, имеющее те же корни, что и данное.

Пример 2. Найдите корень уравнения $12-3x=-4x+7$.

$$12-3x=-4x+7$$

$$-3x+4x=7-12$$

$$x=-5$$

Ответ: -5

Пример 3. Найдите корень уравнения $3(x-8)=-6+x$.

$$3(x-8)=-6+x$$

$$3x-24=-6+x$$

$$3x-x=-6+24$$

$$2x=18 \quad |:2$$

$$x=9$$

Ответ: 9

Пример 4. Найдите корень уравнения $x-\frac{x}{14}=\frac{13}{7}$.

$$\frac{x^{(14)}}{1}-\frac{x^{(1)}}{14}=\frac{13^{(2)}}{7}$$

$$\frac{14x}{14}-\frac{x}{14}=\frac{26}{14} \quad | \cdot 14$$

$$14x-x=26$$

$$13x=26 \quad |:13$$

$$x=2$$

Ответ: 2

Правило пропорции:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d=b \cdot c$$

В верной пропорции произведение крайних членов равно произведению средних.

Пример 5. Найдите корень уравнения $\frac{20}{x+4}=-\frac{8}{3}$.

$$\frac{20}{x+4}=-\frac{8}{3} \quad |:4$$

$$\frac{5}{x+4}=-\frac{2}{3}$$

$$x+4 \neq 0 \quad x \neq -4$$

по правилу пропорции:

$$5 \cdot 3=(x+4) \cdot (-2)$$

$$15=-2x-8$$

$$2x=-8-15$$

$$2x=-23 \quad |:2$$

$$x=-11,5$$

Ответ: -11,5

Пример 6. Найдите корень уравнения $\frac{9}{x-7}=-10$.

$$\frac{9}{x-7}=-\frac{10}{1}$$

$$x-7 \neq 0 \quad x \neq 7$$

по правилу пропорции:

$$9 \cdot 1=(x-7) \cdot (-10)$$

$$9=-10x+70$$

$$10x=70-9$$

$$10x=61 \quad |:10$$

$$x=6,1$$

Ответ: 6,1

Квадрат суммы/разности:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(x-3)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9$$

или

$$(x-3)^2 = (x-3)(x-3) = x^2 - \underline{3x} - \underline{3x} + 9 = x^2 - 6x + 9$$

Пример 7. Найдите корень уравнения $(x+4)^2 = (11-x)^2$.

$$(x+4)^2 = (11-x)^2$$

$$(x+4)(x+4) = (11-x)(11-x)$$

$$x^2 + 4x + 4x + 16 = 121 - 11x - 11x + x^2$$

$$x^2 + 4x + 4x + 11x + 11x - x^2 = 121 - 16$$

$$30x = 105 \quad |:30$$

$$x = 3,5$$

Ответ: 3,5

Реши сам

1. Найдите корни уравнения $2 - 3(2x + 2) = 5 - 4x$.

Если корней несколько, запишите их в ответ без пробелов в порядке возрастания.

2. Решите уравнение $5 - 2x = 11 - 7(x + 2)$.

3. Решите уравнение $\frac{5x+4}{2} + 3 = \frac{9x}{4}$.

4. Решите уравнение: $3 - \frac{x}{7} = \frac{x}{3}$.

5. Решите уравнение: $\frac{x-6}{2} - \frac{x}{3} = 3$.

6. Решите уравнение $3x + 5 + (x + 5) = (1 - x) + 4$.

7. Решите уравнение $10x + 9 = 7x$.

8. Решите уравнение $-x - 2 + 3(x - 3) = 3(4 - x) - 3$.

9. При каком значении x значения выражений $7x - 2$ и $3x + 6$ равны?

10. Решите уравнение $10(x - 9) = 7$.

11. Решите уравнение $-2x^2 + x + 7 = -x^2 + 5x + (-2 - x^2)$.

12. Решите уравнение $(x + 10)^2 = (5 - x)^2$.

13. Решите уравнение $-9(8 - 9x) = 4x + 5$.

14. Решите уравнение $1 - 5x = -6x + 8$.

15. Решите уравнение $9 - 2(-4x + 7) = 7$.

16. Решите уравнение $13 + \frac{x}{4} = x + 1$.

17. Решите уравнение $2x + 2 = -3$.

18. Решите уравнение $x + 7 - \frac{x}{3} = 3$.

19. Решите уравнение $4x + 7 = 0$.

20. Решите уравнение $\frac{x}{12} + \frac{x}{8} + x = -\frac{29}{6}$.

Используемый ресурс:

1. Ященко И. В., Шестаков С. А. ОГЭ по математике от А до Я. Модульный курс. Алгебра.—М.: МЦНМО, 2019.—224 с.
2. Е. А. Ширяева (www.time4math.ru) Задачник (ОГЭ 2021)
3. СДАМ ГИА: РЕШУ ОГЭ Образовательный портал для подготовки к экзаменам Математика

Занятие 10

Уравнения, системы уравнений. Задачи ОГЭ №9

Квадратные уравнения

Квадратные уравнения представлены в открытом банке ОГЭ по математике всеми типами: неполные (с нулевым вторым или третьим коэффициентом) и полные (приведённые и неприведённые). Для того чтобы успешно справиться с подобным заданием на ОГЭ, достаточно уметь решать линейные и квадратные уравнения, помнить правило переноса слагаемого из одной части уравнения в другую (знак этого слагаемого меняется на противоположный), обладать определёнными вычислительными навыками, связанными с арифметическими действиями над целыми числами и дробями.

Квадратные уравнения:

Неполные

$$ax^2 = 0, \\ b = 0, c = 0$$

$$x^2 = 0 \\ x = 0$$

$$ax^2 \pm bx = 0, \\ c = 0$$

(!) Есть общий множитель?

$$ax^2 \pm bx = 0 \\ x(ax \pm b) = 0 \\ x = 0 \quad ax \pm b = 0 \\ \dots$$

$$ax^2 + c = 0, \\ b = 0$$

Разность квадратов?

(!) да

(!) нет

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

корней нет

$$(\sqrt{a}x)^2 - (\sqrt{c})^2 = 0$$

$$(\sqrt{a}x - \sqrt{c})(\sqrt{a}x + \sqrt{c}) = 0$$

$$\sqrt{a}x - \sqrt{c} = 0 \quad \sqrt{a}x + \sqrt{c} = 0$$

Пример 8. Решите уравнение $(4x - 3)(-x + 11) = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите меньший из корней.

$$(4x - 3)(-x + 11) = 0$$

$$ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ или } b = 0$$

$$4x - 3 = 0$$

$$4x = 3 \quad |:4$$

$$x = \frac{3}{4} = 0,75$$

меньший корень

$$-x + 11 = 0$$

$$-x = -11 \quad |:(-1)$$

$$x = 11$$

Ответ: 0,75

Пример 9. Решите уравнение $6x^2 + 54x = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите больший из корней.

$$6x^2 + 54x = 0$$

$$6x(x + 9) = 0$$

$$ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ или } b = 0$$

$$6x = 0 \quad |:6$$

$$x = 0$$

$$x + 9 = 0$$

$$x = -9$$

больший корень

Ответ: 0

Пример 10. Решите уравнение $x^2 - 400 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите меньший из корней.

$$x^2 - 400 = 0$$

$$x^2 - (20)^2 = 0 \text{ — разность квадратов}$$

$$(x - 20)(x + 20) = 0$$

$$x - 20 = 0$$

$$x = 20$$

$$x + 20 = 0$$

$$x = -20$$

меньший корень

Ответ: -20

Пример 11. Решите уравнение $8x^2 - 56x = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите больший из корней.

$$8x^2 - 56x = 0$$

$$8x(x - 7) = 0$$

$$ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ или } b = 0$$

$$8x = 0 \quad |:8$$

$$x = 0$$

$$x - 7 = 0$$

$$x = 7$$

больший корень

Ответ: 7

Квадратные уравнения:

Общий вид:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$1) D > 0 \quad 2 \text{ корня} \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$2) D = 0 \quad 1 \text{ корень} \quad x = \frac{-b}{2a}$$

$$3) D < 0 \quad \text{корней нет}$$

Полные

Приведенное:

$$x^2 + px + q = 0$$

Теорема Виета:

$$x^2 + px + q = 0$$

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = q, \\ x_1 + x_2 = -p \end{cases}$$

Пример 12. Решите уравнение $x^2 + 48 = 14x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите меньший из корней.

$$x^2 + 48 = 14x$$

$$x^2 - 14x + 48 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = 48, \\ x_1 + x_2 = +14 \end{cases}$$

$$x_1 = 8$$

$$x_2 = 6 \text{ — меньший корень}$$

Ответ: 6

Пример 13. Решите уравнение $x^2 - 27 = 6x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите больший из корней.

$$x^2 - 27 = 6x$$

$$x^2 - 6x - 27 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = -27, \\ x_1 + x_2 = +6 \end{cases}$$

$$x_1 = 9 \text{ — больший корень}$$

$$x_2 = -3$$

Ответ: 9

Пример 14. Решите уравнение $4x^2 - 14x - 18 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите меньший из корней.

$$4x^2 - 14x - 18 = 0 \quad |:2$$

$$2x^2 - 7x - 9 = 0$$

$$a=2 \quad b=-7 \quad c=-9$$

$$D=b^2-4ac$$

$$D=(-7)^2-4 \cdot 2 \cdot (-9)=49+72=121>0$$

$$x_1 = \frac{-(-7)+\sqrt{121}}{2 \cdot 2} = \frac{7+11}{4} = 4,5$$

$$x_2 = \frac{-(-7)-\sqrt{121}}{2 \cdot 2} = \frac{7-11}{4} = -1 \text{ (меньш.)}$$

Ответ: -1

Пример 15. Решите уравнение $5x^2 + 12x + 4 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите больший из корней.

$$5x^2 + 12x + 4 = 0$$

$$a=5 \quad b=12 \quad c=4$$

$$D=b^2-4ac$$

$$D=12^2-4 \cdot 5 \cdot 4=144-80=64>0$$

$$x_1 = \frac{-12+\sqrt{64}}{2 \cdot 5} = \frac{-12+8}{10} = -0,4 \text{ (больш.)}$$

$$x_2 = \frac{-12-\sqrt{64}}{2 \cdot 5} = \frac{-12-8}{10} = -2$$

Ответ: -0,4

Реши сам

1. Решите уравнение $x^2 - x - 6 = 0$.

Если корней несколько, запишите их в ответ без пробелов в порядке возрастания.

2. Решите уравнение $x^2 + 3x = 4$.

Если корней несколько, запишите их в ответ без пробелов в порядке возрастания.

3. Решите уравнение $x^2 = 2x + 8$.

Если корней несколько, запишите их в ответ без пробелов в порядке возрастания.

4. Найдите корни уравнения $25x^2 - 1 = 0$.

Если корней несколько, запишите их в ответ без пробелов в порядке возрастания.

5. Найдите корни уравнения $2x^2 - 10x = 0$.

Если корней несколько, запишите их в ответ без пробелов в порядке возрастания.

6. Найдите корни уравнения $x^2 + 7x - 18 = 0$

Если корней несколько, запишите их в ответ без пробелов в порядке возрастания.

7. Найдите корни уравнения $x^2 + 4 = 5x$.

Если корней несколько, запишите их в ответ без пробелов в порядке возрастания.

8. Уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни -6; 4. Найдите q .

9. Квадратный трёхчлен разложен на множители: $x^2 + 6x - 27 = (x + 9)(x - a)$. Найдите a .

10. Решите уравнение $(x - 4)^2 + (x + 9)^2 = 2x^2$.

11. Решите уравнение $4x^2 + 7 = 7 + 24x$.

Если корней несколько, запишите их в ответ без пробелов в порядке возрастания.

12. Уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни -5 ; 7 . Найдите q .

13. Решите уравнение $\frac{5}{4}x^2 + 7x + 9 = 0$

Если корней несколько, запишите их в ответ без пробелов в порядке возрастания.

14. Решите уравнение $(-5x + 3)(-x + 6) = 0$.

Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите меньший из корней.

Используемый ресурс:

1. Ященко И. В., Шестаков С. А. ОГЭ по математике от А до Я. Модульный курс. Алгебра.—М.: МЦНМО, 2019.—224 с.

2. Е. А. Ширяева (www.time4math.ru) Задачник (ОГЭ 2021)

3. СДАМ ГИА: РЕШУ ОГЭ Образовательный портал для подготовки к экзаменам Математика

Занятие 11

Уравнения, системы уравнений. Задачи ОГЭ №9.

Дробно –рациональные уравнения. Системы уравнений

1. Решите уравнение $\frac{9}{x-2} = \frac{9}{2}$.

2.

Решите уравнение $\frac{x-4}{x-6} = 2$.

3. Решите уравнение: $\frac{3}{x-19} = \frac{19}{x-3}$.

Если корней несколько, запишите их в ответ без пробелов в порядке возрастания.

4. Решите уравнение $x - \frac{6}{x} = -1$.

Системы уравнений

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} 4x - 2y = 2, \\ 2x + y = 5. \end{cases}$ В ответ запишите $x + y$.

2. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x - y = -1, \\ -x + 2y = 7. \end{cases}$ В ответ запишите $x + y$.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x + 2y = 8, \\ 4x - y = 7. \end{cases}$ В ответ запишите $x + y$.

4.

Решите систему уравнений $\begin{cases} 5x - y = 7, \\ 3x + 2y = -1. \end{cases}$ В ответ запишите $x + y$.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ 3x + 2y = 12. \end{cases}$ В ответ запишите $x + y$.

6. Решите систему уравнений $\begin{cases} 4x + y = 10, \\ x + 3y = -3. \end{cases}$ В ответ запишите $x + y$.

Используемый ресурс: 1. СДАМ ГИА: РЕШУ ОГЭ Образовательный портал для подготовки к экзаменам Математика

Занятие 12

Статистика, вероятности. Задачи ОГЭ №10

ОГЭ по математике—это простейшая задача на вычисление вероятности. Для решения таких задач достаточно уметь находить отношение числа благоприятных для наступления некоторого события исходов к числу всех равновозможных исходов. Иногда это требует определённых вычислительных навыков, а также действий с отношениями и/или процентами. Для более глубокого усвоения темы могут оказаться полезными следующие простейшие правила и формулы вычисления вероятностей.

Теория вероятностей

Вероятность – доля успеха того или иного события.

Классическое определение вероятности:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{количество благоприятных исходов}}{\text{количество всех возможных исходов}}$$

Опыт №1: бросание игральной кости

Исходы (равновозможные элементарные события): {1; 2; 3; 4; 5; 6} $n = 6$

События: А – выпадение 2-х очков

В – выпадение четного числа очков

С – выпадение менее 7-ми очков

Д – выпадение 8-ми очков

Вероятности:

$P(A) = \frac{1}{6}$	$m = 1: \{2\}$ $n = 6: \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$	А – случайное событие	$0 < P(A) < 1$
----------------------	---	-----------------------	----------------

$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	$m = 3: \{2; 4; 6\}$ $n = 6: \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$	В – случайное событие	$0 < P(B) < 1$
------------------------------------	---	-----------------------	----------------

$P(C) = \frac{6}{6} = 1$	$m = 6: \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $n = 6: \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$	С – достоверное событие	$P(C) = 1$
--------------------------	--	-------------------------	------------

$P(D) = \frac{0}{6} = 0$	$m = 0: \emptyset$ $n = 6: \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$	Д – невозможное событие	$P(D) = 0$
--------------------------	---	-------------------------	------------

Опыт №2: бросание двух монет

Исходы: {ОО; ОР; РО; РР} $n = 4$

События: А – оба раза выпадет «орел»

В – «решка» выпадет более одного раза

С – «решка» выпадет не более одного раза

Д – «орел» выпадет ровно один раз

Вероятности:

$$P(A) = \frac{1}{4} \quad \begin{array}{l} m=1: \{ОО\} \\ n=4: \{ОО; ОР; РО; РР\} \end{array}$$

$$P(D) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \begin{array}{l} m=2: \{ОР; РО\} \\ n=4: \{ОО; ОР; РО; РР\} \end{array}$$

$$P(B) = \frac{1}{4} \quad \begin{array}{l} m=1: \{РР\} \\ n=4: \{ОО; ОР; РО; РР\} \end{array}$$

События В и С – противоположные

$$P(B) + P(C) = 1$$

$$P(C) = \frac{3}{4} \quad \begin{array}{l} m=3: \{ОО; ОР; РО\} \\ n=4: \{ОО; ОР; РО; РР\} \end{array}$$

Элементы комбинаторики

Правило произведения: Если существует n вариантов выбора первого элемента и для каждого из них есть m вариантов выбора второго элемента, то всего существует различных $n \cdot m$ пар с выбранными первым и вторым элементами.

Опыт №3: бросание трех монет

Количество исходов: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

Исходы: {ООО; ООР; ОРО; ОРР; РОО; РОР; РРО; РРР} $n = 8$

События: А – «орел» выпадет ровно два раза

В – «орел» выпадет не менее одного раза

Вероятности:

$$P(A) = \frac{3}{8} \quad \begin{array}{l} m=3: \{ООР; ОРО; РОО\} \\ n=8: \{ООО; ООР; ОРО; ОРР; РОО; РОР; РРО; РРР\} \end{array}$$

$$P(B) = \frac{7}{8} \quad \begin{array}{l} m=7: \{ООО; ООР; ОРО; ОРР; РОО; РОР; РРО\} \\ n=8: \{ООО; ООР; ОРО; ОРР; РОО; РОР; РРО; РРР\} \end{array}$$

Опыт №4: выбор трехзначного числа

Количество исходов: $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ (на первом месте не может стоять «0»)

Исходы: {100; 101; ...; 998; 999} $n = 900$

События: А – выбранное трехзначное число делится на 5

В – выбранное трехзначное число делится на 24

Вероятности:

$$P(A) = \frac{180}{900} = \frac{1}{5} \quad \begin{array}{l} m=180: \{9 \cdot 10 \cdot 2 = 180\} \\ n=900: \{100; 101; \dots; 998; 999\} \end{array} \quad \text{последняя цифра «0» или «5»}$$

$$P(B) = \frac{37}{900} \quad m=37: \left\{ 100 \leq 24k \leq 999, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 4\frac{1}{6} \leq k \leq 41\frac{5}{8} \Rightarrow k=41-4=37 \right\}$$

$$n=900: \{100; 101; \dots; 998; 999\}$$

Сложение и умножение вероятностей

Теорема 1. Вероятность суммы двух несовместных событий А и В равна сумме вероятностей этих событий: $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

Теорема 2. Для независимых событий справедливо: $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Произведением событий А и В называется событие АВ, состоящее в том, что происходят оба этих события.

Два события называются **независимыми**, если наступление одного из них не влияет на вероятность наступления другого.

Опыт №5: бросание двух игральных костей

Количество исходов: $6 \cdot 6 = 36$

Исходы:

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

События:

А – сумма выпавших чисел равна 7 или 8

В – выпало хотя бы одно число, большее 4

A_1 – сумма выпавших чисел равна 7

A_2 – сумма выпавших чисел равна 8

Вероятности:

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{6}{36} + \frac{5}{36} = \frac{11}{36}$$

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

$$P(B) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9} \quad m=20$$

$$n=36$$

Опыт №6: стрельба по мишени (известна вероятность попадания)

Вероятность попадания при одном выстреле: $P=0,7$.

События:

A – стрелок выстрелил и попал

$\bar{A}$ – стрелок выстрелил и не попал (промахнулся)

B – стрелок три раза выстрелил: в первый раз попал, а потом два раза не попал (промахнулся)

C – стрелок из четырех выстрелов не попал ни разу

Вероятности:

$$P(A)=0,7$$

$$P(\bar{A})=1-P(A)=1-0,7=0,3 \text{ (события } A \text{ и } \bar{A} \text{ – противоположные, } P(A)+P(\bar{A})=1)$$

$$P(B)=P(A) \cdot P(\bar{A}) \cdot P(\bar{A})=0,7 \cdot 0,3 \cdot 0,3=0,063 \text{ (каждое попадание/промах – независимое событие)}$$

$$P(C)=P(\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) \cdot P(\bar{A})=0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,3=0,0081 \text{ (каждый промах – независимое событие)}$$

Опыт №7: покупка лотерейного билета (дана вероятность выигрыша)

Вероятность получить главный приз равна 0,0001,
поощрительный приз – 0,0009.

События:

A – купленный билет «выиграет»

$\bar{A}$ – купленный билет «не выиграет»

Вероятности:

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)=0,0001+0,0009=0,001, \text{ где}$$

A_1 – купленный билет «выиграет главный приз»

A_2 – купленный билет «выиграет поощрительный приз»

$$P(\bar{A})=1-P(A)=1-0,001=0,999 \text{ (события } A \text{ и } \bar{A} \text{ – противоположные)}$$

Статистика**Статистическое определение вероятности:**

$$P(A) \approx W(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{\text{количество успешных опытов (частота события } A)}{\text{количество всех опытов}}$$

$W(A)$ – относительная частота события A

Опыт №8: выбор ручки (известны статистические данные)

В среднем из 200 ручек три бракованные.
Какова вероятность купить хорошую ручку?

События:

A – выбранная ручка бракованная

$\bar{A}$ – выбранная ручка небракованная (хорошая)

Вероятность:

$$P(A) \approx W(A) = \frac{3}{200} = 0,015$$

$$\begin{aligned} n_A &= 3 \\ n &= 200 \end{aligned}$$

$$P(\bar{A})=1-P(A)=1-0,015=0,985$$

Опыт №9: бросание монеты 100 раз

Монету подбросили 100 раз, «орел» выпал 52 раза. Насколько относительная частота выпадения «орла» отличается от вероятности этого события?

Событие A – выпадет «орел»

Вероятность:

$$P(A) = \frac{1}{2} \quad \begin{array}{l} m=1: \{O\} \\ n=2: \{O; P\} \end{array}$$

Относительная частота:

$$W(A) = \frac{52}{100} \quad \begin{array}{l} n_A = 52 \\ n = 100 \end{array}$$

$$W(A) - P(A) = \frac{52}{100} - \frac{1}{2} = \frac{52}{100} - \frac{50}{100} = \frac{2}{100} = 0,02$$

Реши сам

1. У бабушки 20 чашек: 15 с красными цветами, остальные с синими. Бабушка наливает чай в случайно выбранную чашку. Найдите вероятность того, что это будет чашка с синими цветами.
2. На экзамене 50 билетов, Оскар не выучил 7 из них. Найдите вероятность того, что ему попадётся выученный билет.
3. Родительский комитет закупил 20 пазлов для подарков детям в связи с окончанием учебного года, из них 11 с машинами и 9 с видами городов. Подарки распределяются случайным образом между 20 детьми, среди которых есть Илюша. Найдите вероятность того, что Илюше достанется пазл с машиной.
4. На тарелке лежат одинаковые на вид пирожки: 4 с мясом, 5 с рисом и 21 с повидлом. Андрей наугад берёт один пирожок. Найдите вероятность того, что пирожок окажется с повидлом.
5. В фирме такси в данный момент свободно 20 машин: 3 чёрные, 3 жёлтые и 14 зелёных. По вызову выехала одна из машин, случайно оказавшаяся ближе всего к заказчику. Найдите вероятность того, что к нему приедет жёлтое такси.
6. В среднем из 150 карманных фонариков, поступивших в продажу, три неисправных. Найдите вероятность того, что выбранный наудачу в магазине фонарик окажется исправен.
7. В лыжных гонках участвуют 11 спортсменов из России, 6 спортсменов из Норвегии и 3 спортсмена из Швеции. Порядок, в котором спортсмены

стартуют, определяется жребием. Найдите вероятность того, что первым будет стартовать спортсмен из России.

8. В лыжных гонках участвуют 11 спортсменов из России, 6 спортсменов из Норвегии и 3 спортсмена из Швеции. Порядок, в котором спортсмены стартуют, определяется жребием. Найдите вероятность того, что первым будет стартовать спортсмен из Норвегии или Швеции.

9. В магазине канцтоваров продаётся 112 ручек: 17 красных, 44 зелёные, 29 фиолетовых, остальные синие и чёрные, их поровну. Найдите вероятность того, что случайно выбранная в этом магазине ручка будет красной или чёрной.

Используемый ресурс:

1. Ященко И. В., Шестаков С. А. ОГЭ по математике от А до Я. Модульный курс. Алгебра.—М.: МЦНМО, 2019.—224 с.

2. Е. А. Ширяева (www.time4math.ru) Задачник (ОГЭ 2021)

3. СДАМ ГИА: РЕШУ ОГЭ Образовательный портал для подготовки к экзаменам Математика

Занятие 13

Графики функций. Задачи ОГЭ №11

Задания, связанные с функциями и их графиками (именно к ним относится задание 11 ОГЭ), ежегодно включаются в варианты ОГЭ по математике. По большей части это задания на чтение графиков функций, содержащие вопросы о свойствах функций, задания, в которых требуется установить соответствие между функциями, заданными формулами, и графиками этих функций, либо вариации последних, предполагающие ответ на вопрос, какая из нескольких данных формул задаёт функцию, график которой приведён в условии, или какой из нескольких данных графиков соответствует функции, заданной указанной в условии формулой. Напомним, что графиком линейной функции является прямая, уравнение прямой имеет вид $y = kx + b$, а для построения этой прямой достаточно задать координаты двух её точек.

ТЕОРИЯ

Линейная функция

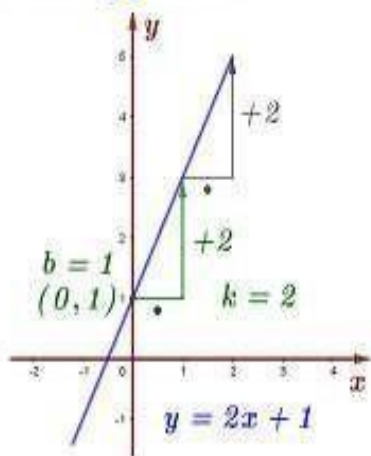


График: прямая линия

Общий вид: $y = kx + b$

k – коэффициент возрастания/убывания

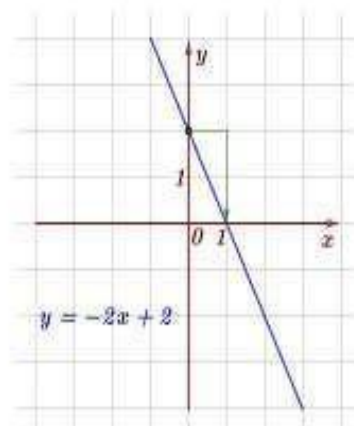
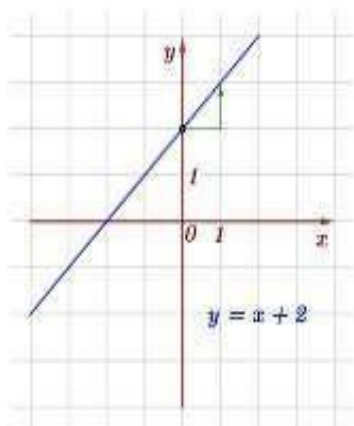
$k > 0 \rightarrow$ возрастает $\nearrow$ $k < 0 \rightarrow$ убывает $\searrow$

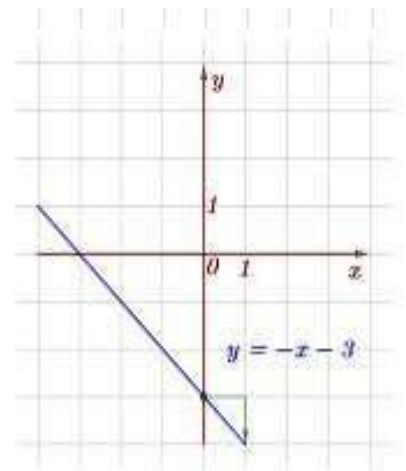
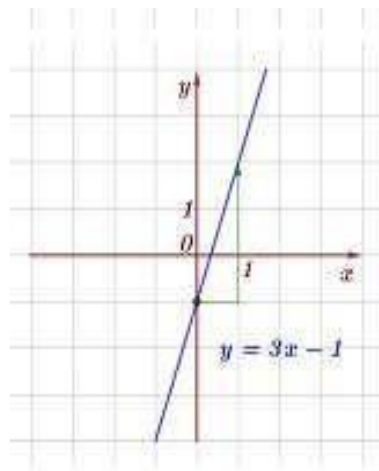
b – начальная ордината $b = y(0)$

$(0, b)$ – точка пересечения с осью Oy

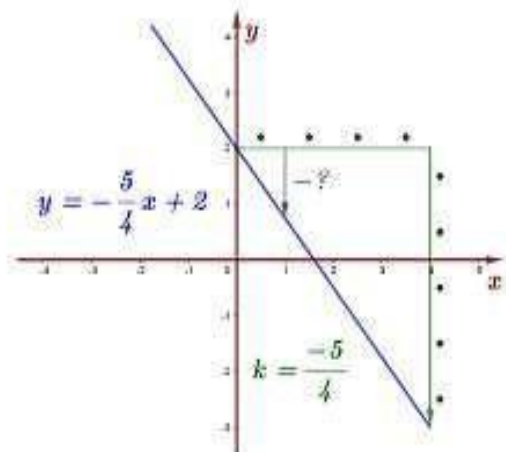
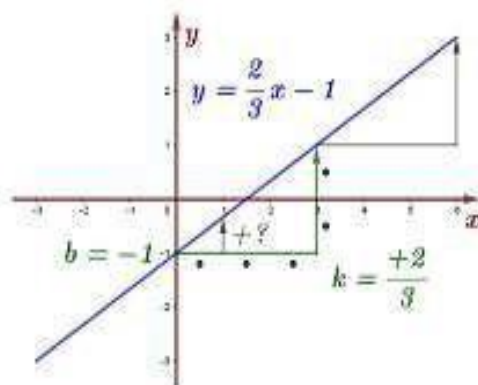
Примеры: $y = 4x + 3$, $y = \frac{2}{5}x - 1$, $y = -6x$

Примеры графиков:

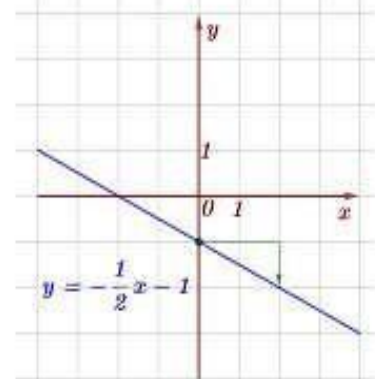
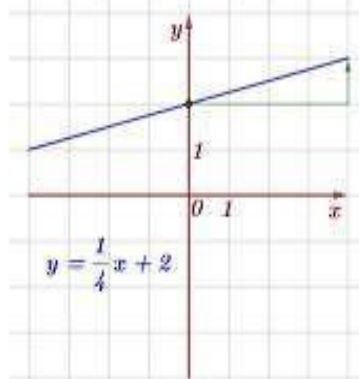
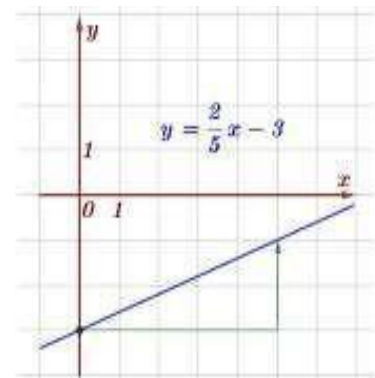
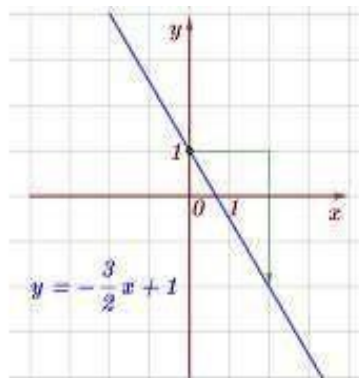




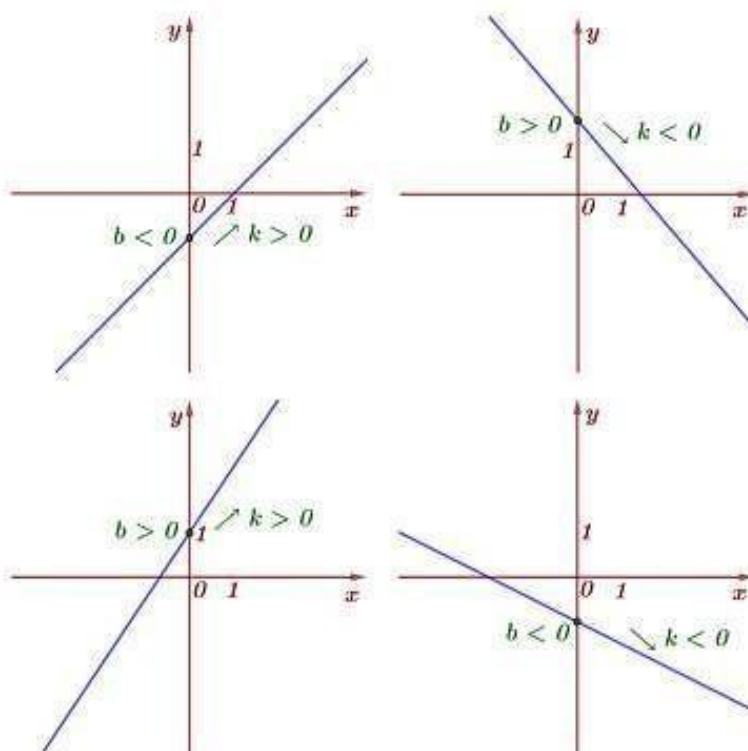
Вычисление коэффициента k :



Примеры графиков:



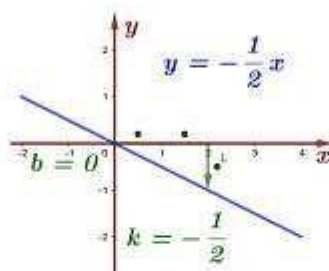
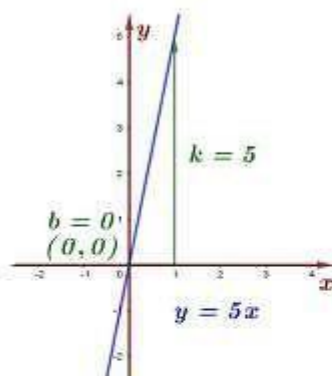
Примеры графиков:



Особые случаи:

Прямая пропорциональность

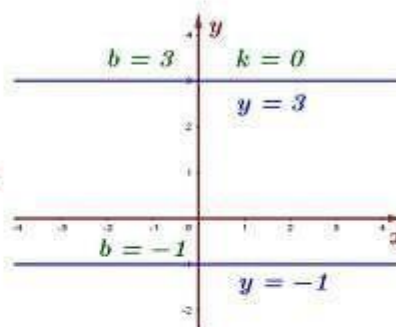
$$y = kx \quad (b=0)$$



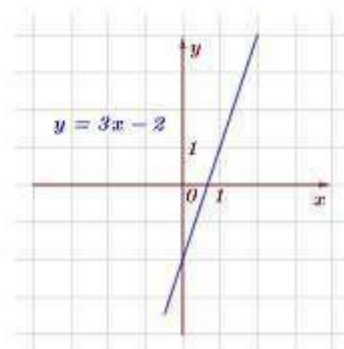
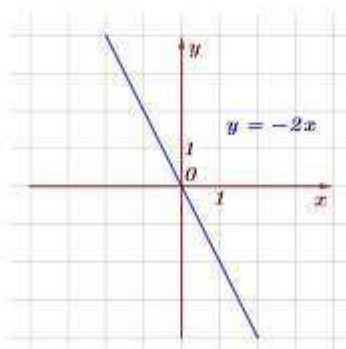
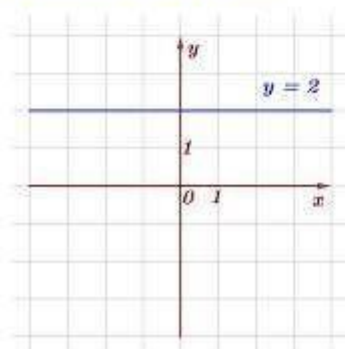
Постоянная функция

$$y = b \quad (k=0)$$

параллельна оси Ox



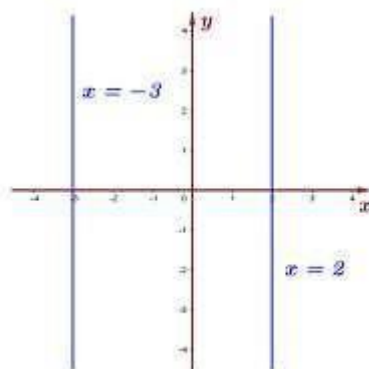
Примеры графиков:



Интересно! График линейной функции $y = kx + b$ – это прямая линия.

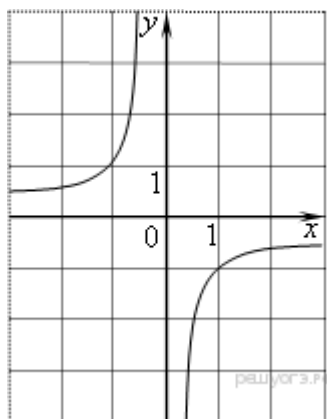
График уравнения $x = a$ тоже прямая линия, хотя это не функция.

График уравнения $x = a$ параллелен оси Oy .

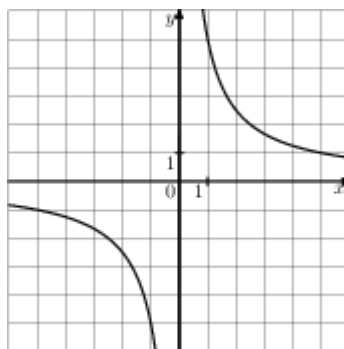


Реши сам

1. Найдите значение k по графику функции $y = \frac{k}{x}$, изображенному на рисунке.

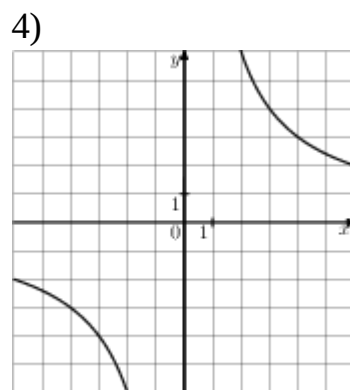
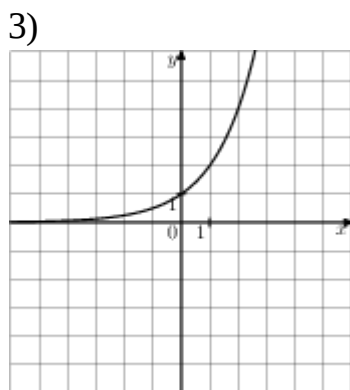
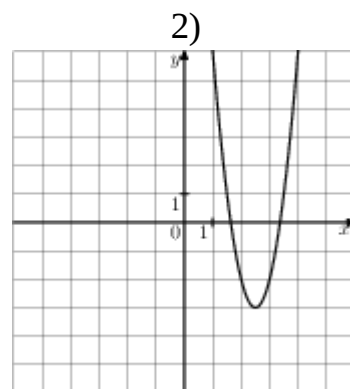
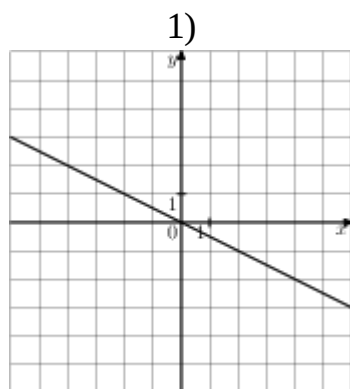


2. График какой из приведенных ниже функций изображен на рисунке?

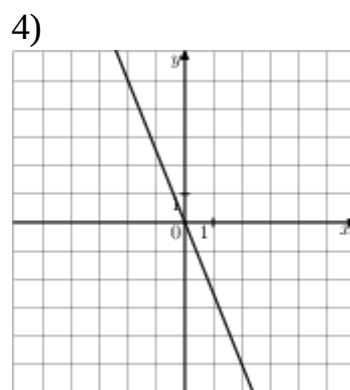
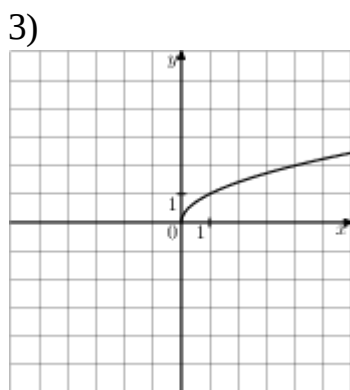
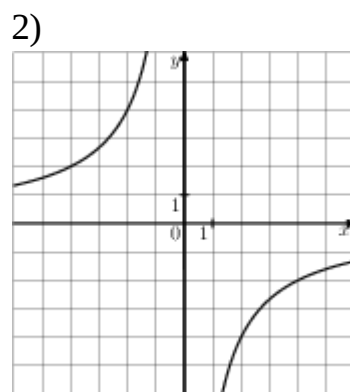
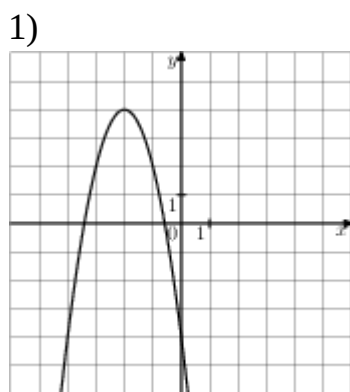


- 1) $y = -\frac{5}{x}$ 2) $y = -\frac{1}{5x}$ 3) $y = \frac{5}{x}$ 4) $y = \frac{1}{5x}$

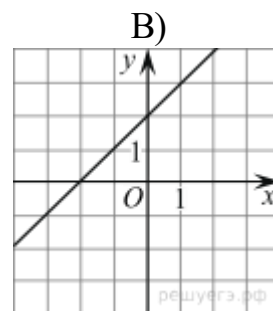
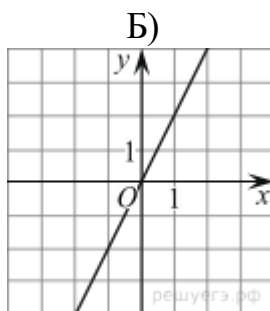
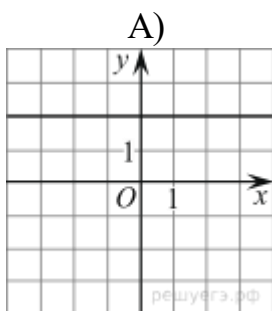
3. На одном из рисунков изображен график функции $y = \frac{12}{x}$. Укажите номер этого рисунка.



4. На одном из рисунков изображена гипербола. Укажите номер этого рисунка.



5. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.



1) $y = 2x$ 2) $y = -2x$ 3) $y = x + 2$ 4) $y = 2$

Ответ укажите в виде последовательности цифр без пробелов и запятых в указанном порядке.

А	Б	В

6. Установите соответствие между функциями и их графиками.

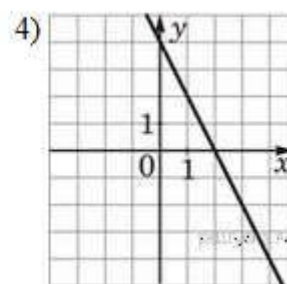
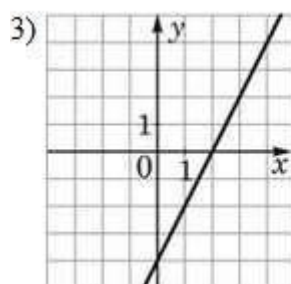
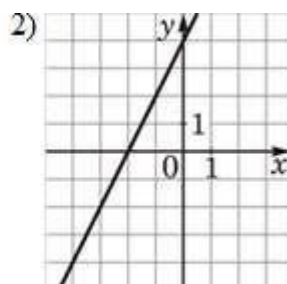
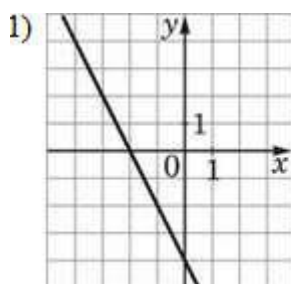
Функции

А) $y = -2x + 4$

Б) $y = 2x - 4$

В) $y = 2x + 4$

Графики



Запишите в ответ цифры, расположив их в порядке, соответствующем буквам:

А	Б	В

7. Установите соответствие между функциями и их графиками.

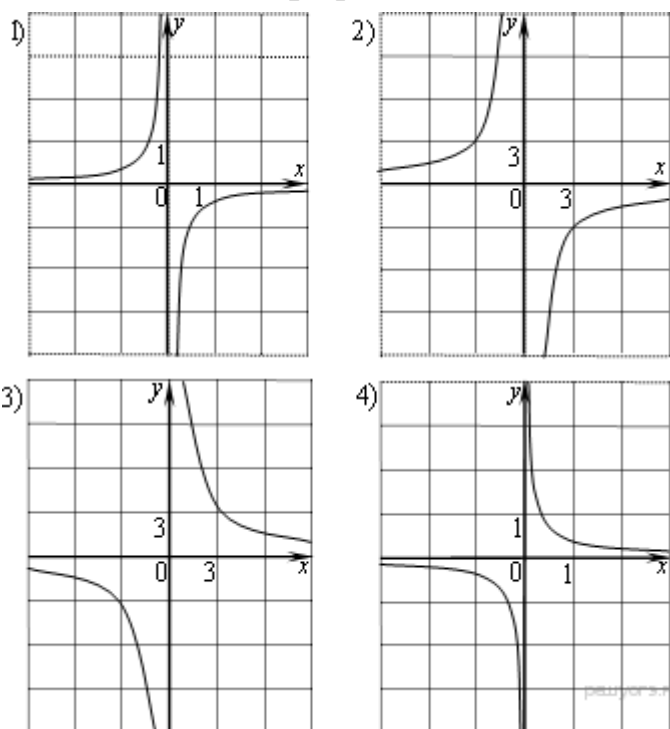
Функции

A) $y = \frac{1}{9x}$

Б) $y = \frac{9}{x}$

В) $y = -\frac{9}{x}$

Графики

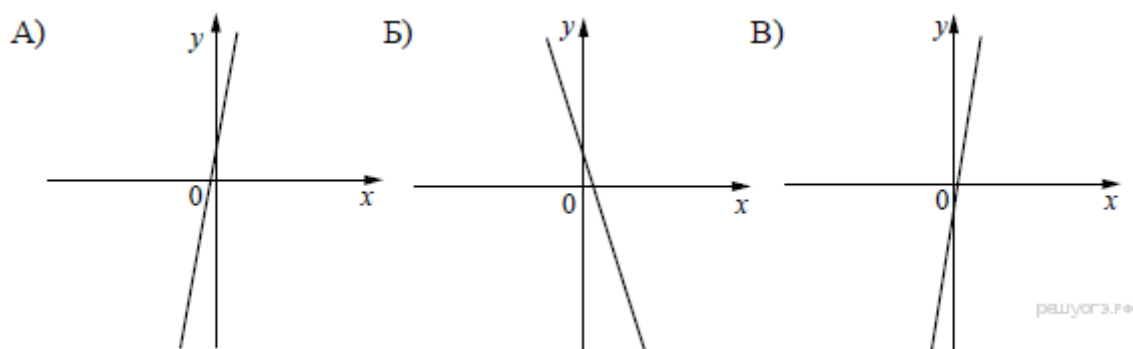


Запишите в ответ цифры, расположив их в порядке, соответствующем буквам:

А	Б	В

8. На рисунке изображены графики функций вида $y = kx + b$. Установите соответствие между графиками функций и знаками коэффициентов k и b .

Графики



Коэффициенты

1) $k < 0, b > 0$ 2) $k > 0, b > 0$ 3) $k < 0, b < 0$ 4) $k > 0, b < 0$

Запишите в ответ цифры, расположив их в порядке, соответствующем буквам:

А	Б	В

Используемый ресурс:

1. Яценко И. В., Шестаков С. А. ОГЭ по математике от А до Я. Модульный курс. Алгебра.—М.: МЦНМО, 2019.—224 с.
2. Е. А. Ширяева (www.time4math.ru) Задачник (ОГЭ 2021)
3. СДАМ ГИА: РЕШУ ОГЭ Образовательный портал для подготовки к экзаменам Математика

Занятие 14

Графики функций. Задачи ОГЭ №11

Квадратичная функция

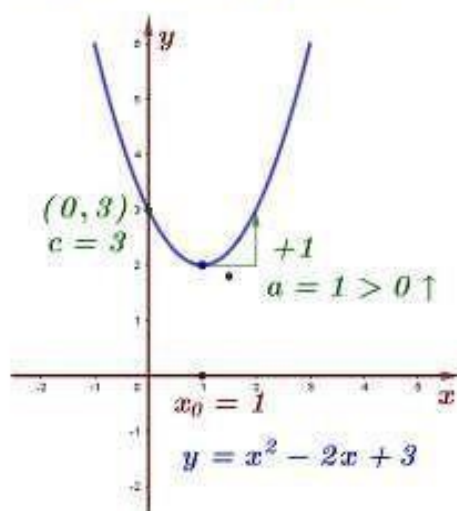


График: парабола

Общий вид: $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

$a > 0 \rightarrow$ ветви направлены вверх $\cup$

$a < 0 \rightarrow$ ветви направлены вниз $\cap$

абсцисса вершины: $x_0 = -\frac{b}{2a}$

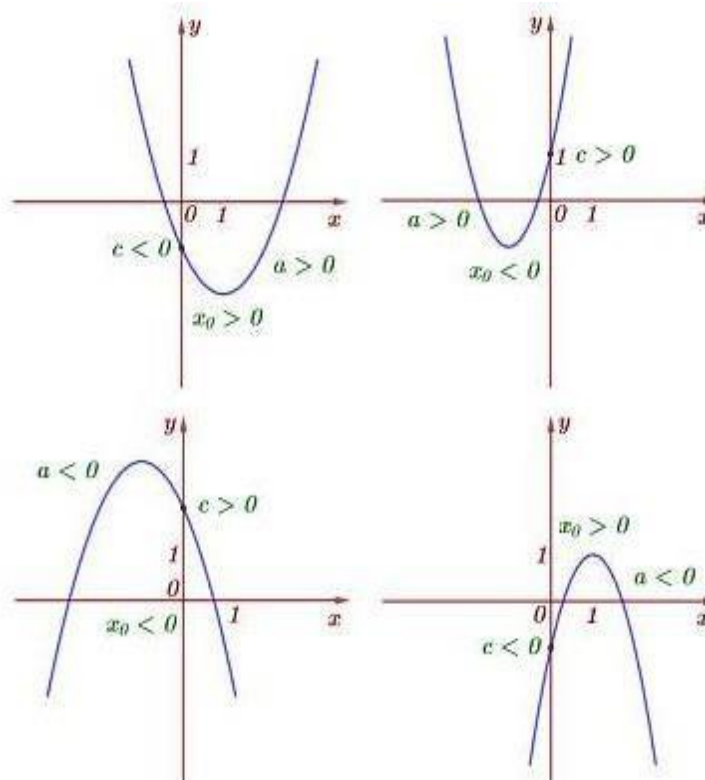
$c = y(0)$, $(0, c)$ – точка пересечения с осью Oy

Примеры:

$y = x^2 - 8x + 3$ $a = 1, b = -8, c = 3$

$y = -3x^2 - 12x + 4$ $a = -3, b = -12, c = 4$

Примеры графиков:



Обратная пропорциональность

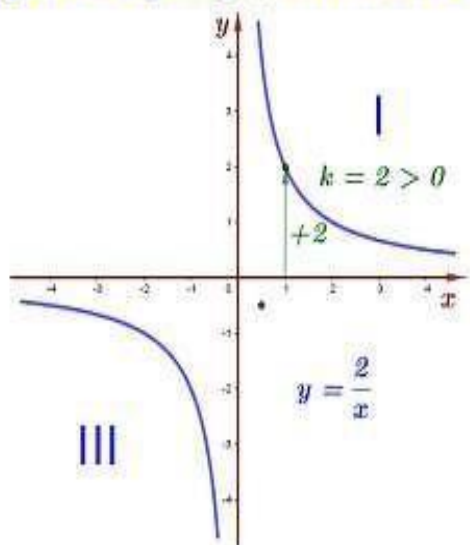


График: гипербола

Общий вид: $y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$

$k > 0 \rightarrow$ ветви в I и III четверти

$k < 0 \rightarrow$ ветви в II и IV четверти

Примеры:

$$y = \frac{5}{x} \quad k = 5$$

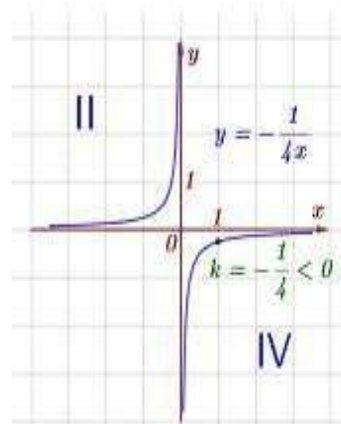
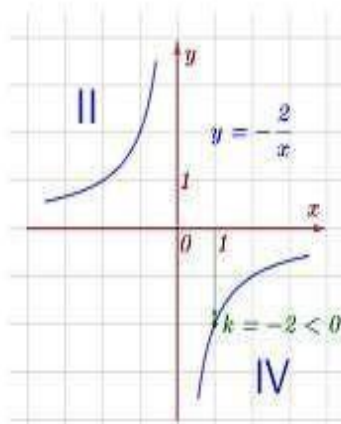
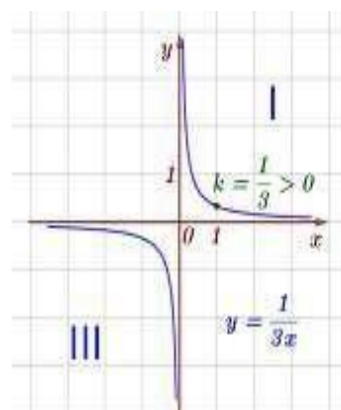
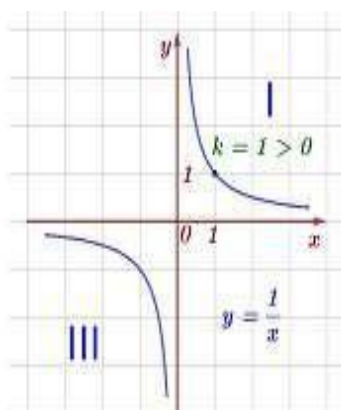
$$y = \frac{1}{4x} \quad k = \frac{1}{4}$$

$$y = -\frac{7}{x} \quad k = -7$$

$$y = -\frac{1}{6x} \quad k = -\frac{1}{6}$$

Примеры графиков:

Чем больше модуль k ,
тем график дальше
от осей

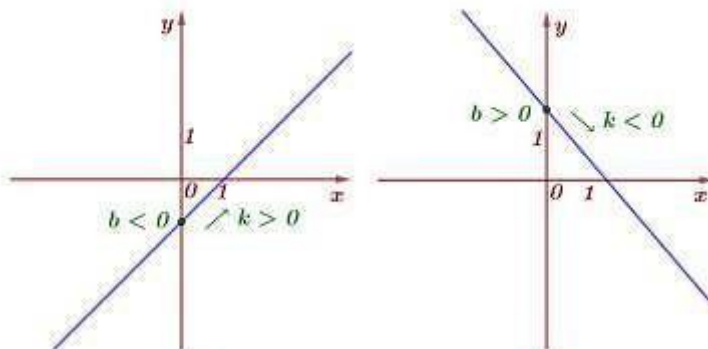


Графики функций (обобщение)

Линейная функция

Прямая линия

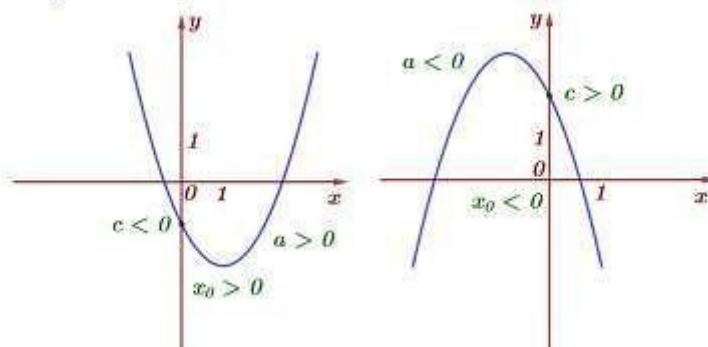
$$y = kx + b$$



Квадратичная функция

Парабола

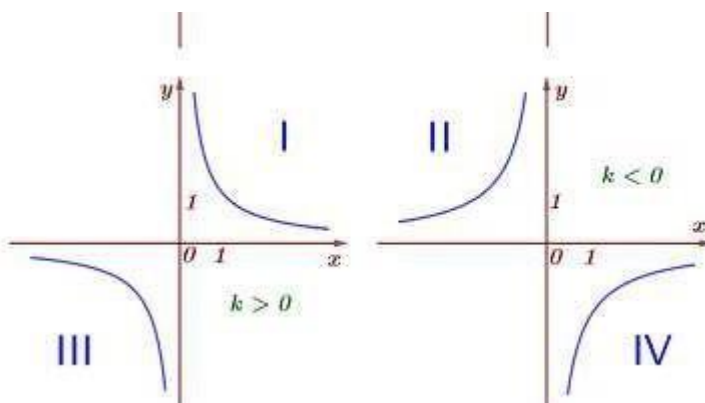
$$y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$



Обратная пропорциональность

Гипербола

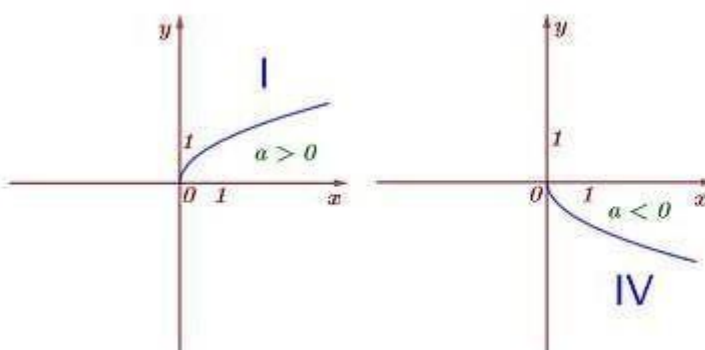
$$y = \frac{k}{x}, k \neq 0$$



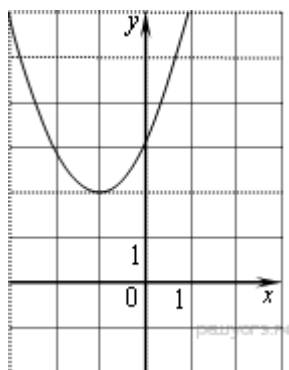
Функция квадратного корня

Ветвь параболы, симметричной относительно оси Ox

$$y = a\sqrt{x}, a \neq 0$$

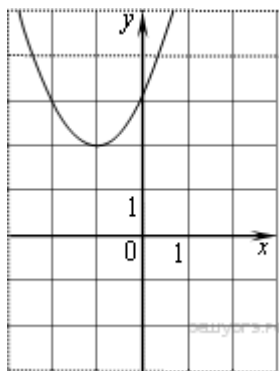


1. Найдите значение a по графику функции $y = ax^2 + bx + c$, изображенному на рисунке.



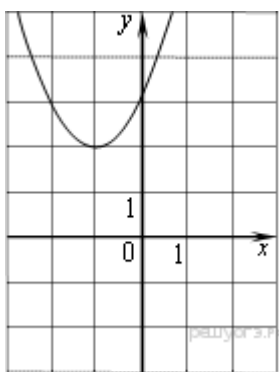
- 1) -1 2) 1 3) 2 4) 3

2. Найдите значение b по графику функции $y = ax^2 + bx + c$, изображенному на рисунке.



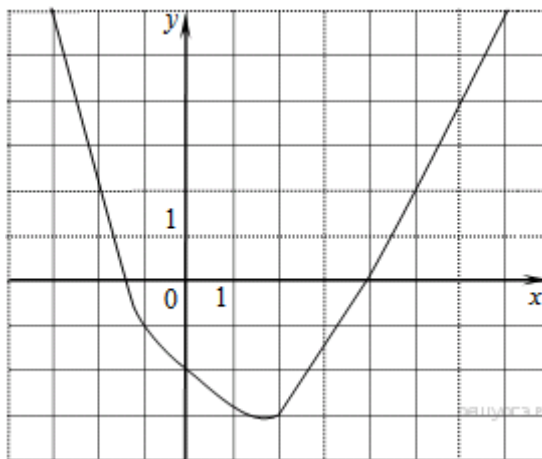
- 1) -2 2) 1 3) 2 4) 3

3. Найдите значение c по графику функции $y = ax^2 + bx + c$, изображенному на рисунке.

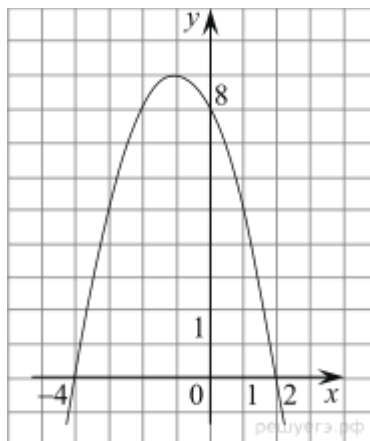


- 1) -3 2) 1 3) 2 4) 3

4. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Какие из утверждений относительно этой функции неверны? Укажите их номера.

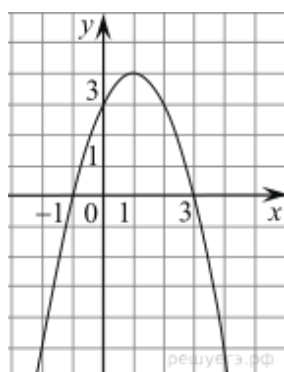


- 1) функция возрастает на промежутке $[-2; +\infty)$
- 2) $f(3) > f(-3)$
- 3) $f(0) = -2$
- 4) прямая $y = 2$ пересекает график в точках $(-2; 2)$ и $(5; 2)$
- 5.



На рисунке изображён график квадратичной функции $y = f(x)$.
Какие из следующих утверждений о данной функции неверны? Запишите их номера в порядке возрастания.

- 1) Функция возрастает на промежутке $(-\infty; -1]$.
- 2) Наибольшее значение функции равно 8.
- 3) $f(-4) \neq f(2)$.
- 6.



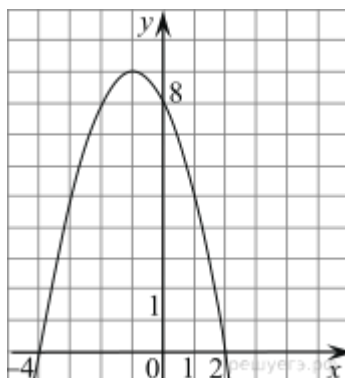
На рисунке изображён график квадратичной функции $y = f(x)$.

Какие из следующих утверждений о данной функции неверны? Запишите их номера.

1) $f(-1) = f(3)$. 2) Наибольшее значение функции равно 3.

3) $f(x) > 0$ при $-1 < x < 3$.

7.



На рисунке изображён график квадратичной функции $y = f(x)$.

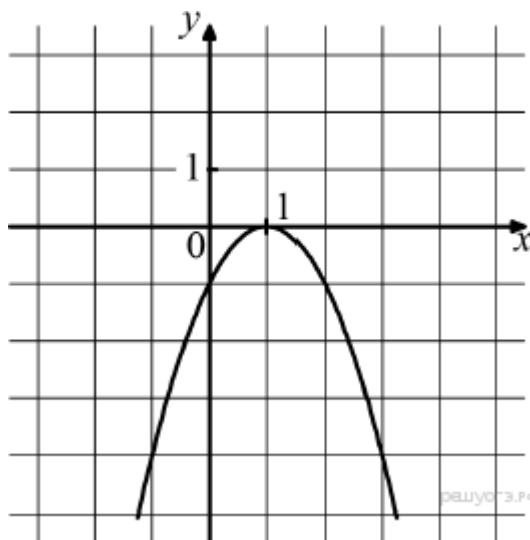
Какие из следующих утверждений о данной функции неверны? Запишите их номера.

1) Наибольшее значение функции равно 9.

2) $f(0) > f(1)$.

3) $f(x) > 0$ при $x < 0$.

8. На рисунке изображён график функции $y = ax^2 + bx + c$. Установите соответствие между утверждениями и промежутками, на которых эти утверждения выполняются. Впишите в приведённую в ответе таблицу под каждой буквой соответствующую цифру.



УТВЕРЖДЕНИЯ

А) функция возрастает на промежутке

Б) функция убывает на промежутке

ПРОМЕЖУТКИ

1) $[1; 2]$

2) $[0; 2]$

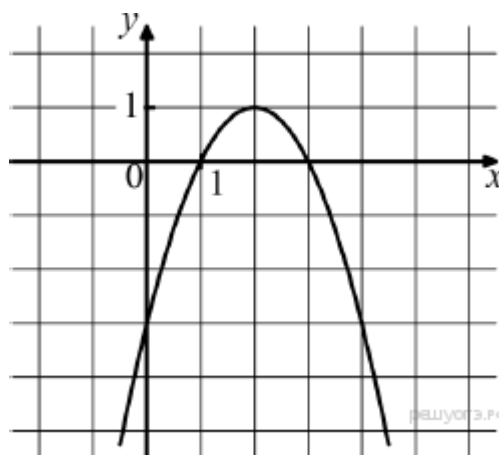
3) $[-1; 0]$

4) $[-2; 3]$

А	Б

Ответ:

9. На рисунке изображён график функции вида $y = ax^2 + bx + c$. Установите соответствие между утверждениями и промежутками, на которых эти утверждения выполняются. Впишите в приведённую в ответе таблицу под каждой буквой соответствующую цифру.



УТВЕРЖДЕНИЯ

ПРОМЕЖУТКИ

А) функция возрастает на промежутке

1) $[0; 3]$

Б) функция убывает на промежутке

2) $[-1; 1]$

3) $[2; 4]$

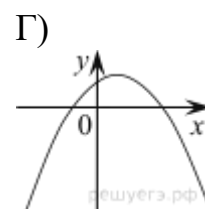
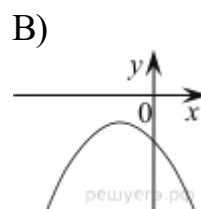
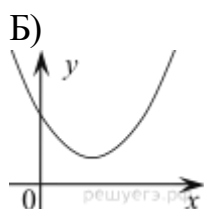
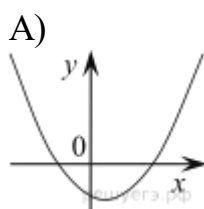
4) $[1; 4]$

Запишите в ответ цифры, расположив их в порядке, соответствующем буквам:

А	Б

10. На рисунке изображены графики функций вида $y = ax^2 + bx + c$. Для каждого графика укажите соответствующее ему значения коэффициента a и дискриминанта D .

Графики



Знаки чисел

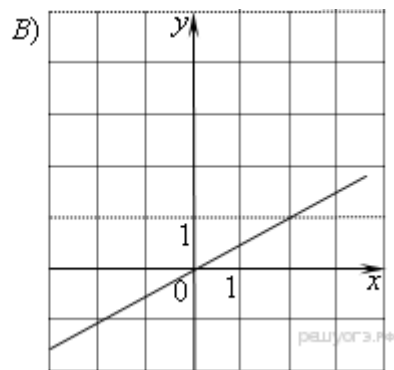
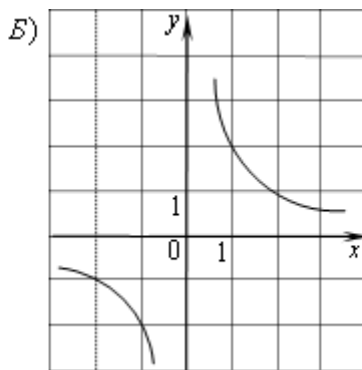
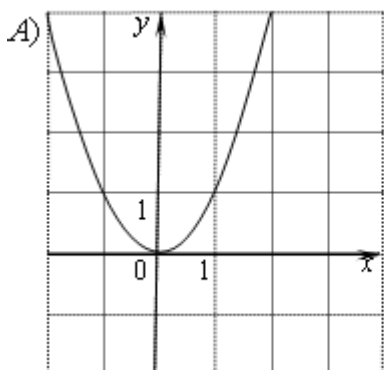
- 1) $a > 0, D > 0$ 2) $a > 0, D < 0$ 3) $a < 0, D > 0$ 4) $a < 0, D < 0$

Запишите в ответ цифры, расположив их в порядке, соответствующем буквам:

А	Б	В	Г

11.

Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

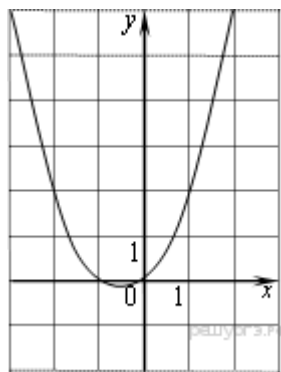


- 1) $y = x^2$ 2) $y = \frac{x}{2}$ 3) $y = \sqrt{x}$ 4) $y = \frac{2}{x}$

Ответ укажите в виде последовательности цифр без пробелов и запятых в указанном порядке.

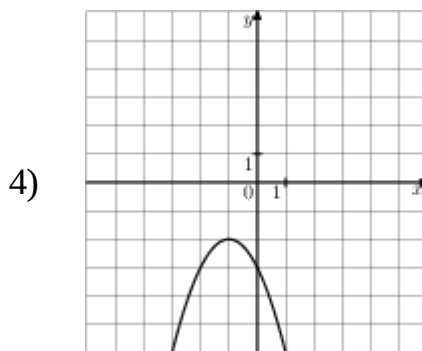
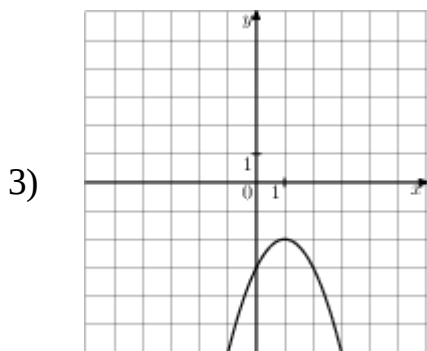
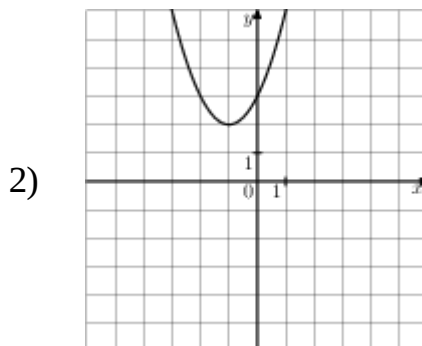
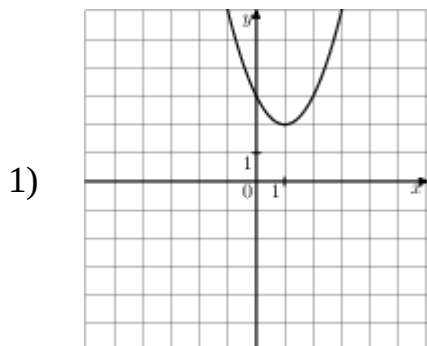
А	Б	В

12. График какой из приведенных ниже функций изображен на рисунке?

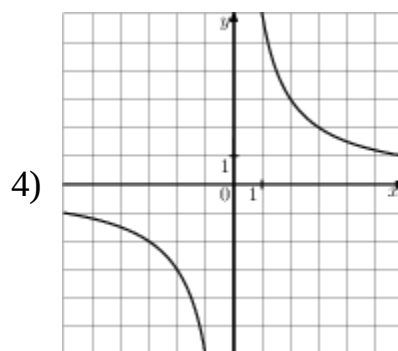
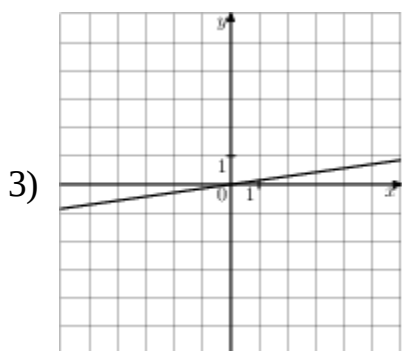
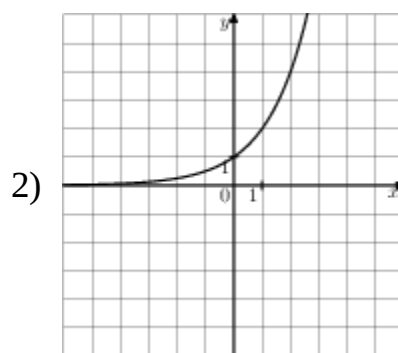
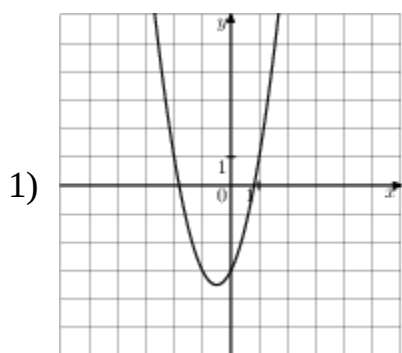


1) $y = x^2 - x$ 2) $y = -x^2 - x$ 3) $y = x^2 + x$ 4) $y = -x^2 + x$

13. На одном из рисунков изображен график функции $y = x^2 - 2x + 3$. Укажите номер этого рисунка.

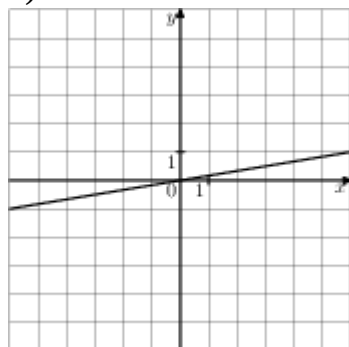


14. На одном из рисунков изображена парабола. Укажите номер этого рисунка.

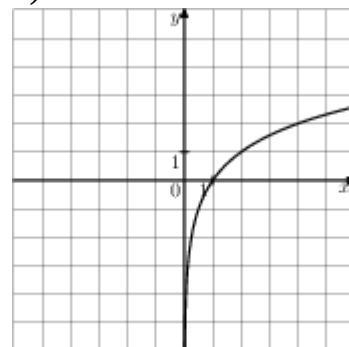


15. На одном из рисунков изображен график функции $y = 3x^2 + 15x + 17$.
Укажите номер этого рисунка.

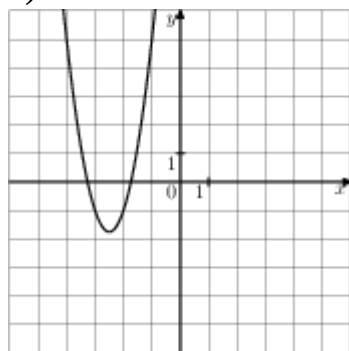
1)



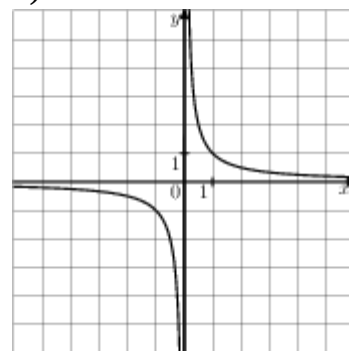
2)



3)



4)



16. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

Графики

А)	Б)	В)

Формулы

1) $y = -\frac{1}{2}x$ 2) $y = -\frac{1}{x}$ 3) $y = -x^2 - 2$ 4) $y = \sqrt{x}$

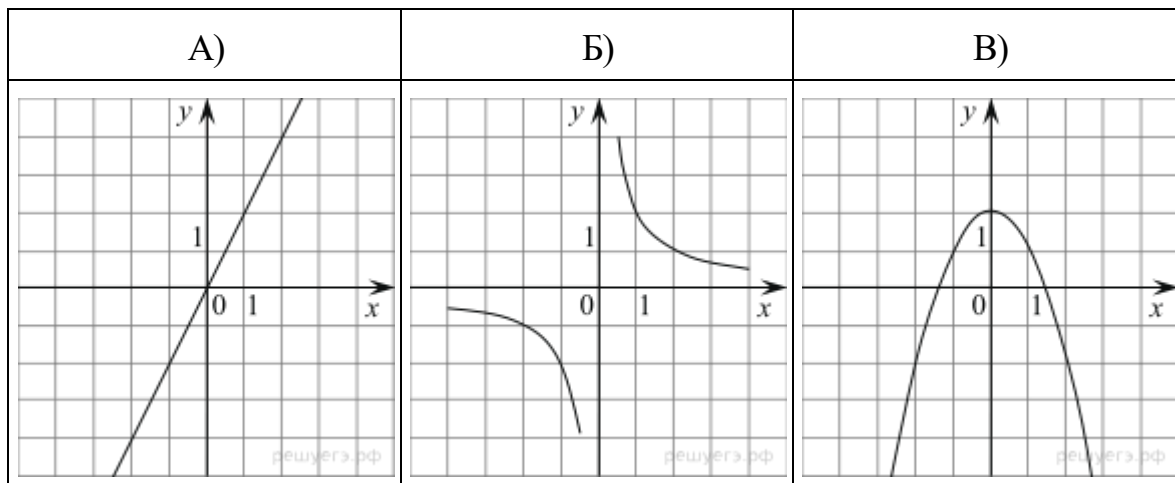
Запишите в ответ цифры, расположив их в порядке, соответствующем буквам:

А	Б	В
---	---	---

--	--	--

17. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

Графики



Формулы

1) $y = \frac{2}{x}$ 2) $y = x^2 - 2$ 3) $y = 2x$ 4) $y = 2 - x^2$

Запишите в ответ цифры, расположив их в порядке, соответствующем буквам:

А	Б	В

18. Установите соответствие между функциями и их графиками.

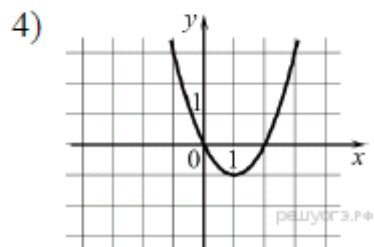
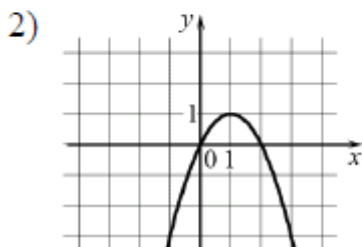
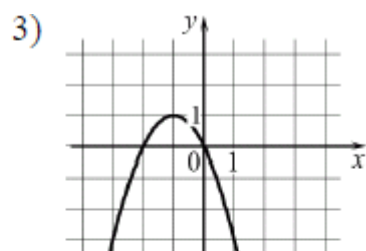
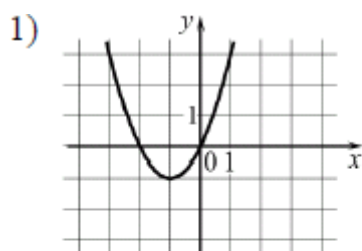
ФУНКЦИИ

А) $y = x^2 - 2x$

Б) $y = x^2 + 2x$

В) $y = -x^2 - 2x$

ГРАФИКИ

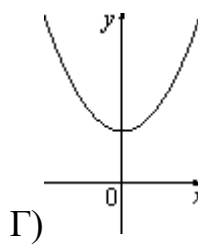
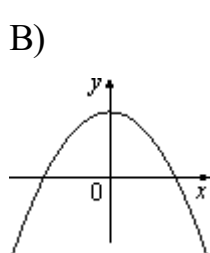
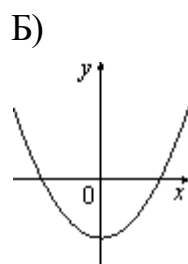
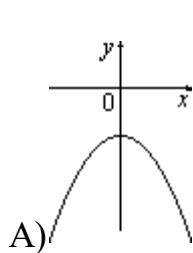


Запишите в ответ цифры, расположив их в порядке, соответствующем буквам:

А	Б	В

19. На рисунке изображены графики функций вида $y = ax^2 + c$. Установите соответствие между графиками и знаками коэффициентов a и c .

ГРАФИКИ



ЗНАКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ

1) $a > 0, c < 0$ 2) $a < 0, c > 0$ 3) $a > 0, c > 0$ 4) $a < 0, c < 0$

Запишите в ответ цифры, расположив их в порядке, соответствующем буквам:

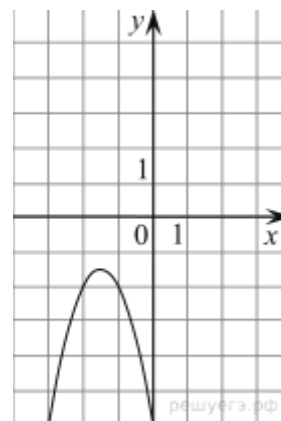
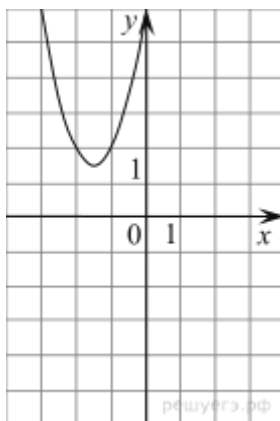
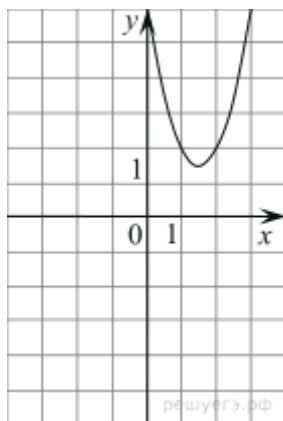
А	Б	В	Г

20. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

А)

Б)

В)



- 1) $y = -2x^2 + 6x - 6$
- 2) $y = -2x^2 - 6x - 6$
- 3) $y = 2x^2 + 6x + 6$
- 4) $y = 2x^2 - 6x + 6$

Ответ укажите в виде последовательности цифр без пробелов и запятых в указанном порядке.

А	Б	В

Используемый ресурс:

1. Яценко И. В., Шестаков С. А. ОГЭ по математике от А до Я. Модульный курс. Алгебра.—М.: МЦНМО, 2019.—224 с.
2. Е. А. Ширяева (www.time4math.ru) Задачник (ОГЭ 2021)
3. СДАМ ГИА: РЕШУ ОГЭ Образовательный портал для подготовки к экзаменам Математика

Занятие 15

Расчеты по формулам. Задачи ОГЭ №12

Задание 12 ОГЭ по математике представляет собой задачу на вычисление по данной формуле. По сути в условиях таких задач даются формулы из разных областей знаний, причём значения всех величин за исключением одной в этих формулах известны. Требуется найти значение именно этой величины. Есть подобные задачи и в ЕГЭ по математике—как базового, так и профильного уровня. Отметим, что для решения этих задач вовсе не обязательно быть специалистом, например, в области физики или химии, здесь проверяется именно умение вычислять значение искомой величины по данной формуле и данным константам, т. е. по сути это задачи на «понимание при чтении», данном случае чтении условия. При этом в само условие, вообще говоря, можно не вникать, более того, это и не нужно: достаточно выписать данную формулу и значения данных в условии величин, подставить эти значения в выписанную формулу и найти из неё единственную неизвестную величину.

Вычисление по формуле

1. В фирме «Эх, прокачу!» стоимость поездки на такси (в рублях) рассчитывается по формуле $C = 150 + 11 \cdot (t - 5)$, где t — длительность поездки, выраженная в минутах ($t > 5$). Пользуясь этой формулой, рассчитайте стоимость 8-минутной поездки.

Ответ: 183

2. Площадь параллелограмма S (в м^2) можно вычислить по формуле $S = a \cdot b \cdot \sin \alpha$, где a , b — стороны параллелограмма (в метрах). Пользуясь этой формулой, найдите площадь параллелограмма, если его стороны 10 м и 12 м и $\sin \alpha = 0,5$.

Ответ: 60

3. В фирме «Чистая вода» стоимость (в рублях) колодца из железобетонных колец рассчитывается по формуле $C = 6500 + 4000 \cdot n$, где n — число колец, установленных при рытье колодца. Пользуясь этой формулой, рассчитайте стоимость колодца из 11 колец.

Ответ: 50500

4. Зная длину своего шага, человек может приближённо подсчитать пройденное им расстояние s по формуле $s = nl$, где n — число шагов, l — длина шага. Какое расстояние прошёл человек, если $l = 80$ см, $n = 1600$? Ответ выразите в километрах.

Ответ: 1,28

5. Расстояние s (в метрах) до места удара молнии можно приближённо вычислить по формуле $s = 330t$, где t — количество секунд, прошедших между вспышкой молнии и ударом грома. Определите, на каком расстоянии от места удара молнии находится наблюдатель, если $t = 10$ с. Ответ дайте в километрах, округлив его до целых.

Ответ: 3

6. Из формулы центростремительного ускорения $a = \omega^2 R$ найдите R (в метрах), если $\omega = 4 \text{ с}^{-1}$ и $a = 64 \text{ м/с}^2$.

Ответ: 4

Линейные уравнения

1. Длину окружности l можно вычислить по формуле $l = 2\pi R$, где R — радиус окружности (в метрах). Пользуясь этой формулой, найдите радиус окружности, если её длина равна 78 м. (Считать $\pi = 3$).

Ответ: 13

2. Площадь ромба S (в м^2) можно вычислить по формуле $S = \frac{1}{2}d_1 d_2$, где d_1, d_2 — диагонали ромба (в метрах). Пользуясь этой формулой, найдите диагональ d_1 , если диагональ d_2 равна 30 м, а площадь ромба 120 м^2 .

Ответ: 8

3. Площадь треугольника S (в м^2) можно вычислить по формуле $S = \frac{1}{2}ah$, где a — сторона треугольника, h — высота, проведенная к этой стороне (в метрах). Пользуясь этой формулой, найдите сторону a , если площадь треугольника равна 28 м^2 , а высота h равна 14 м.

Ответ: 4

4. Площадь трапеции S (в м^2) можно вычислить по формуле $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$, где a, b — основания трапеции, h — высота (в метрах). Пользуясь этой формулой, найдите высоту h , если основания трапеции равны 5 м и 7 м, а её площадь 24 м^2 .

Ответ: 4

5. Радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности можно найти

по формуле $r = \frac{a+b-c}{2}$, где a и b — катеты, а c — гипотенуза треугольника. Пользуясь этой формулой, найдите b , если $r = 1,2$; $c = 6,8$ и $a = 6$.

Ответ: 3,2

6. Объём пирамиды вычисляют по формуле $V = \frac{1}{3}Sh$, где S — площадь основания пирамиды, h — её высота. Объём пирамиды равен 40, площадь основания 15. Чему равна высота пирамиды?

Ответ: 8

7. Площадь любого выпуклого четырехугольника можно вычислять по формуле $S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \alpha$, где d_1, d_2 — длины его диагоналей, а α угол между ними. Вычислите $\sin \alpha$, если $S = 21, d_1 = 7, d_2 = 15$.

Ответ: 0,4

8. Чтобы перевести значение температуры по шкале Цельсия (t °C) в шкалу Фаренгейта (t °F), пользуются формулой $F = 1,8C + 32$, где C — градусы Цельсия, F — градусы Фаренгейта. Какая температура по шкале Цельсия соответствует 6° по шкале Фаренгейта? Ответ округлите до десятых.

Ответ: -14,4

9. Центробежное ускорение при движении по окружности (в м/с²) можно вычислить по формуле $a = \omega^2 R$, где ω — угловая скорость (в с⁻¹), а R — радиус окружности. Пользуясь этой формулой, найдите расстояние R (в метрах), если угловая скорость равна 3 с⁻¹, а центробежное ускорение равно 45 м/с².

Ответ: 5

10. Из закона всемирного тяготения $F = G \frac{mM}{r^2}$ выразите массу m и найдите её величину (в килограммах), если $F = 13,4$ Н, $r = 5$ м, $M = 5 \cdot 10^9$ кг и

$$G = 6,7 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}.$$

гравитационная постоянная

Ответ: 1000

11. Полную механическую энергию тела (в джоулях) можно вычислить по

формуле $E = \frac{mv^2}{2} + mgh$, где m — масса тела (в килограммах), v — его скорость (в м/с), h — высота положения центра масс тела над произвольно выбранным нулевым уровнем (в метрах), а g — ускорение свободного падения (в м/с²). Пользуясь этой формулой, найдите h (в метрах), если $E = 250$ Дж, $v = 5$ м/с, $m = 4$ кг, а $g = 10$ м/с².

Ответ: 5

12. Мощность постоянного тока (в ваттах) вычисляется по формуле $P = I^2 R$, где I — сила тока (в амперах), R — сопротивление (в омах). Пользуясь этой формулой, найдите сопротивление R (в омах), если мощность составляет 150 ватт, а сила тока равна 5 амперам.

Ответ: 6

13. Закон Кулона можно записать в виде $F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$, где F — сила взаимодействия зарядов (в ньютонах), q_1 и q_2 — величины зарядов (в кулонах), k — коэффициент пропорциональности (в $\text{Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2$), а r — расстояние между зарядами (в метрах). Пользуясь формулой, найдите величину заряда q_1 (в кулонах), если $k = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2$, $q_2 = 0,004 \text{ Кл}$, $r = 3000 \text{ м}$, а $F = 0,016 \text{ Н}$.
 Ответ: 0,004

14. Закон всемирного тяготения можно записать в виде $F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$, где F — сила притяжения между телами (в ньютонах), m_1 и m_2 — массы тел (в килограммах), r — расстояние между центрами масс (в метрах), а γ — гравитационная постоянная, равная $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$. Пользуясь формулой, найдите массу тела m_1 (в килограммах), если $F = 33,35 \text{ Н}$, $m_2 = 5 \cdot 10^8 \text{ кг}$, а $r = 2 \text{ м}$.
 Ответ: 4000

15. Закон Джоуля–Ленца можно записать в виде $Q = I^2 R t$, где Q — количество теплоты (в джоулях), I — сила тока (в амперах), R — сопротивление цепи (в омах), а t — время (в секундах). Пользуясь этой формулой, найдите время t (в секундах), если $Q = 2187 \text{ Дж}$, $I = 9 \text{ А}$, $R = 3 \text{ Ом}$.
 Ответ: 9

16. Площадь четырёхугольника можно вычислить по формуле $S = \frac{d_1 d_2 \sin \alpha}{2}$, где d_1 и d_2 — длины диагоналей четырёхугольника, α — угол между диагоналями. Пользуясь этой формулой, найдите длину диагонали d_1 , если $d_2 = 7$, $\sin \alpha = \frac{2}{7}$, а $S = 4$.
 Ответ: 4

17. Закон Менделеева-Клапейрона можно записать в виде $PV = \nu RT$, где P — давление (в паскалях), V — объём (в м^3), ν — количество вещества (в молях), T — температура (в градусах Кельвина), а R — универсальная газовая постоянная, равная $8,31 \text{ Дж} / (\text{К} \cdot \text{моль})$. Пользуясь этой формулой, найдите температуру T (в градусах Кельвина), если $\nu = 68,2 \text{ моль}$, $P = 37\,782,8 \text{ Па}$, $V = 6 \text{ м}^3$.
 Ответ: 400

Разные задачи

1. Период колебания математического маятника T (в секундах) приближенно можно вычислить по формуле $T = 2\sqrt{l}$, где l — длина нити (в метрах). Пользуясь этой формулой, найдите длину нити маятника (в метрах), период колебаний которого составляет 3 секунды.

Ответ: 2,25

2. Радиус описанной около треугольника окружности можно найти по формуле $R = \frac{a}{2 \sin \alpha}$, где a — сторона треугольника, α — противолежащий этой стороне угол, а R — радиус описанной около этого треугольника окружности. Пользуясь этой формулой, найдите $\sin \alpha$, если $a = 0,6$, а $R = 0,75$.

Ответ: 0,4

3. Длину биссектрисы треугольника, проведённой к стороне a , можно

вычислить по формуле $l_a = \frac{2bc \cos \frac{\alpha}{2}}{b+c}$. Вычислите $\cos \frac{\alpha}{2}$, если $b = 1$, $c = 3$, $l_a = 1,2$.

Ответ: 0,8

Используемый ресурс:

СДАМ ГИА: РЕШУ ОГЭ Образовательный портал для подготовки к экзаменам Математика

Занятие 16

Неравенства, системы неравенств. Задачи ОГЭ №13

Задание 13 ОГЭ по математике представляет собой линейное или квадратное неравенство либо систему двух простейших линейных неравенств.

ТЕОРИЯ

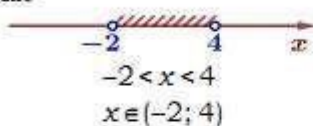
Числовые неравенства

Вся числовая ось

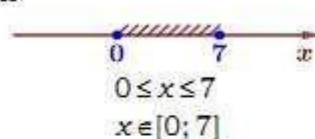


$$x \in \mathbb{R}$$
$$x \in (-\infty; +\infty)$$

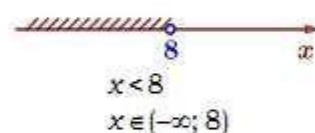
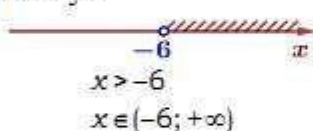
Интервал



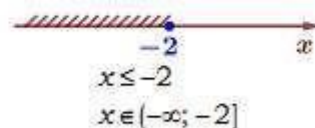
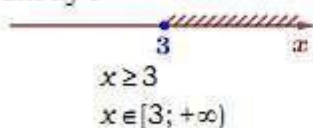
Отрезок



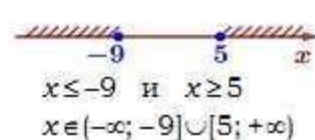
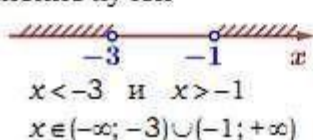
Открытый луч



Закрытый луч



Объединение лучей



Решением неравенства с одним неизвестным называется то значение неизвестного, при котором это неравенство обращается в верное числовое неравенство.

Решить неравенство – найти все его решения или установить, что их нет.

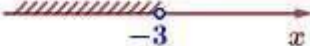
Свойства неравенств

1. Любой член неравенства можно перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком, при этом знак неравенства не меняется.
2. Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю. Если число положительно, то знак неравенства не меняется, если отрицательно – знак неравенства меняется на противоположный.

Линейные неравенства

Общий вид: Алгоритм решения неравенств, сводящихся к линейным:
1) перенести члены, содержащие неизвестное, в левую часть, а члены, не содержащие неизвестное, в правую (свойство 1);
2) приведя подобные члены, разделить обе части неравенства на коэффициент при неизвестном, если он не равен нулю (свойство 2).

Пример 1. Решите неравенство:

$$\begin{aligned} \text{а) } 6x - 7 &> 10x + 5 \\ 6x - 10x &> 5 + 7 \\ -4x &> 12 \quad | :(-4) \quad -4 < 0 \\ x &< -3 \end{aligned}$$

$$x \in (-\infty; -3)$$

$$\begin{aligned} \text{б) } 17x - 4(3x - 8) &\geq 80 \\ 17x - 12x + 32 &\geq 80 \\ 5x &\geq 80 - 32 \\ 5x &\geq 48 \quad | :5 \\ x &\geq 9,6 \end{aligned}$$

$$x \in [9,6; +\infty)$$

Решением системы неравенств с одним неизвестным называется то значение неизвестного, при котором все неравенства системы обращаются в верные числовые неравенства.

Решить систему неравенств – найти все решения этой системы или установить, что их нет.

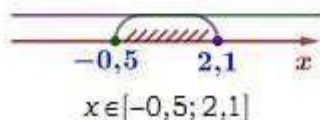
Системы двух линейных неравенств

Алгоритм:

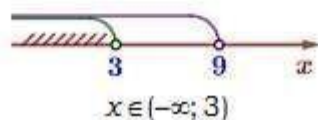
- 1) решить оба неравенства;
- 2) изобразить на числовой оси множество решений первого и второго неравенств системы;
- 3) определить значения неизвестного, которые одновременно принадлежат обоим интервалам.

Пример 2. Решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} x - 2,1 \leq 0 \\ -2x + 2 \leq 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 2,1 \\ -2x \leq 1 \quad | :(-2) \end{cases}$$
$$\begin{cases} x \leq 2,1 \\ -2x \leq 3 - 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 2,1 \\ x \geq -0,5 \end{cases}$$



$$\text{б) } \begin{cases} -72 + 8x < 0 \\ 5 - 6x > -13 \end{cases} \quad \begin{cases} x < 9 \\ -6x > -18 \quad | :(-6) \end{cases}$$
$$\begin{cases} 8x < 72 \quad | :8 \\ -6x > -13 - 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x < 9 \\ x < 3 \end{cases}$$



Пример 3. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} x - 3 \geq -2 \\ x + 1,4 \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -2 + 3 \\ x \leq -1,4 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1,4 \end{cases}$$



Реши сам

1. Решите неравенство $20 - 3(x - 5) < 19 - 7x$.

В ответе укажите номер правильного варианта.

- 1) $(-4; +\infty)$ 2) $(-\infty; -\frac{1}{4})$ 3) $(-\frac{1}{4}; +\infty)$ 4) $(-\infty; -4)$

2. Найдите наибольшее значение x , удовлетворяющее системе неравенств

$$\begin{cases} 6x + 18 \leq 0, \\ x + 8 \geq 2. \end{cases}$$

3. Найдите наибольшее значение x , удовлетворяющее системе неравенств

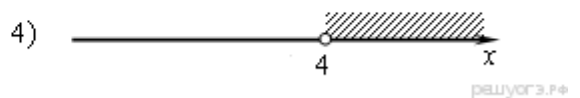
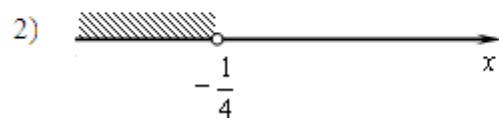
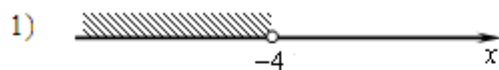
$$\begin{cases} 5x + 15 \leq 0, \\ x + 5 \geq 1. \end{cases}$$

4. Решите неравенство

$$20 - 3(x - 5) < 19 - 7x$$

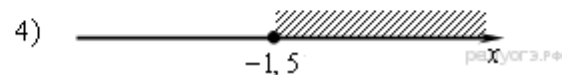
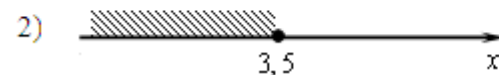
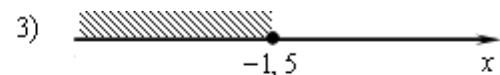
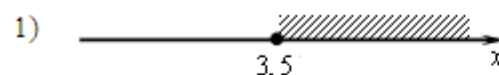
и определите, на каком рисунке изображено множество его решений.

В ответе укажите номер правильного варианта.



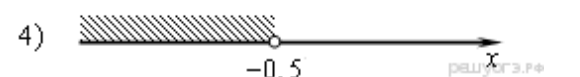
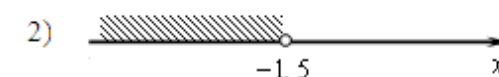
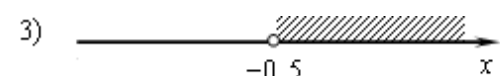
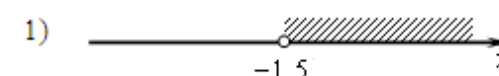
5. Решите неравенство $4x + 5 \geq 6x - 2$ и определите, на каком рисунке изображено множество его решений.

В ответе укажите номер правильного варианта.



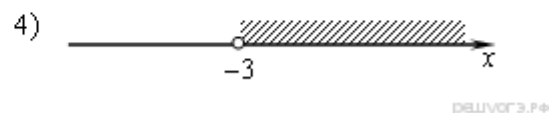
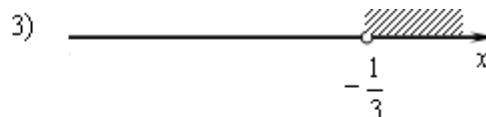
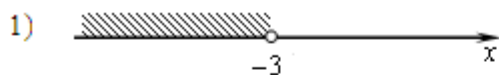
6. Решите неравенство $x - 1 < 3x + 2$ и определите, на каком рисунке изображено множество его решений.

В ответе укажите номер правильного варианта.



7. Решите неравенство $22 - x > 5 - 4(x - 2)$ и определите, на каком рисунке изображено множество его решений.

В ответе укажите номер правильного варианта.



8. При каких значениях a выражение $5a + 9$ принимает отрицательные значения?

В ответе укажите номер правильного варианта.

1) $a > -\frac{9}{5}$ 2) $a < -\frac{5}{9}$ 3) $a > -\frac{5}{9}$ 4) $a < -\frac{9}{5}$

9. Решите неравенство $9x - 4(2x + 1) > -8$.

В ответе укажите номер правильного варианта.

1) $(-4; +\infty)$ 2) $(-12; +\infty)$ 3) $(-\infty; -4)$ 4) $(-\infty; -12)$

10. При каких значениях x значение выражения $9x + 7$ меньше значения выражения $8x - 3$?

В ответе укажите номер правильного варианта.

1) $x > 4$ 2) $x < 4$ 3) $x > -10$ 4) $x < -10$

11. Решите неравенство $6x - 7 < 8x - 9$.

В ответе укажите номер правильного варианта.

1) $(-\infty; 8)$ 2) $(-\infty; 1)$ 3) $(8; +\infty)$ 4) $(1; +\infty)$

12. При каких значениях x значение выражения $6x - 2$ больше значения выражения $7x + 8$?

В ответе укажите номер правильного варианта.

1) $x > -10$ 2) $x < -10$ 3) $x > -6$ 4) $x < -6$

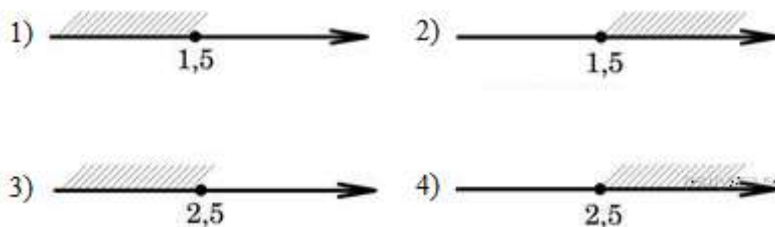
13. Решите неравенство $4x - 4 \geq 9x + 6$.

В ответе укажите номер правильного варианта.

1) $[-0,4; +\infty)$ 2) $(-\infty; -2]$ 3) $[-2; +\infty)$ 4) $(-\infty; -0,4]$

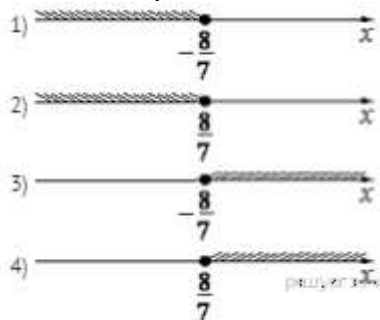
14. На каком рисунке изображено множество решений неравенства $2 + x \leq 5x - 8$?

В ответе укажите номер правильного варианта.



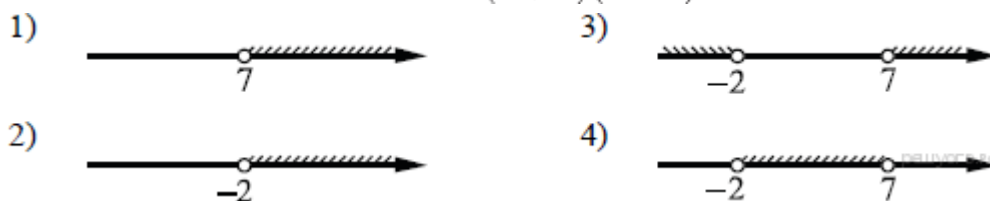
15. На каком рисунке изображено множество решений неравенства $4 - 7(x + 3) \leq -9$?

В ответе укажите номер правильного варианта.



16. Укажите решение неравенства

$$(x + 2)(x - 7) > 0.$$



Используемый ресурс:

1. Яценко И. В., Шестаков С. А. ОГЭ по математике от А до Я. Модульный курс. Алгебра.—М.: МЦНМО, 2019.—224 с.

2. Е. А. Ширяева (www.time4math.ru) Задачник (ОГЭ 2021)

3. СДАМ ГИА: РЕШУ ОГЭ Образовательный портал для подготовки к экзаменам Математика

Занятие 17

Неравенства, системы неравенств. Задачи ОГЭ №13

Задание 13 ОГЭ по математике представляет собой линейное или квадратное неравенство либо систему двух простейших линейных неравенств.

Кроме того, в заданиях ОГЭ обычно нужно выбрать множество решений неравенства из нескольких предложенных либо поставить в соответствие каждому из нескольких данных неравенств числовые промежутки (изображённые на числовой оси или заданные простейшими неравенствами), предложенные в качестве множеств решений этих неравенств.

Квадратные неравенства:

Общий вид:

$$ax^2 + bx + c < 0, \quad a \neq 0$$

$<$ – знак неравенства

($\leq, \geq, <, >$)

Способы решения:

- 1) сведение к системе линейных неравенств;
- 2) с помощью графика квадратичной функции;
- 3) метод интервалов.

Сведение к системе линейных неравенств (1 способ)

Алгоритм:

1) разложить квадратный многочлен на множители $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$;

2) составить и решить две системы;

$$a \cdot b > 0 \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases}$$

$$a \cdot b < 0 \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$$

3) объединить решения обеих систем.

Пример 4. Решите неравенство $x^2 + x - 20 \geq 0$.

$$x^2 + x - 20 \geq 0$$

$$x^2 + x - 20 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-20) = 81$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{81}}{2 \cdot 1} = -5$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{81}}{2 \cdot 1} = 4$$

$$x^2 + x - 20 = (x + 5)(x - 4)$$

$$(x + 5)(x - 4) \geq 0$$

$$\begin{cases} x + 5 \geq 0 \\ x - 4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -5 \\ x \geq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -5 \\ x \geq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -5 \\ x \geq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -5 \\ x \geq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -5 \\ x \geq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -5 \\ x \geq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -5 \\ x \geq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -5 \\ x \geq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -5 \\ x \geq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -5 \\ x \geq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -5 \\ x \geq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -5 \\ x \geq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -5 \\ x \geq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -5 \\ x \geq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -5 \\ x \geq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -5 \\ x \geq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -5 \\ x \geq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -5 \\ x \geq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -5 \\ x \geq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -5 \\ x \geq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -5 \\ x \geq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 5 \leq 0 \\ x - 4 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -5 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -5 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -5 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -5 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -5 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -5 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -5 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -5 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -5 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -5 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -5 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -5 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -5 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -5 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -5 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -5 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -5 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -5 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -5 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -5 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -5 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

Ответ: $x \in (-\infty; -5] \cup [4; +\infty)$

Пример 5. Решите неравенство $(x + 10)(x - 2) < 0$.

$$(x + 10)(x - 2) < 0$$

$$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x + 10 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2 < 0 \\ x + 10 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x + 10 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2 < 0 \\ x + 10 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x + 10 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2 < 0 \\ x + 10 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x + 10 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2 < 0 \\ x + 10 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x + 10 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2 < 0 \\ x + 10 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x + 10 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 2 \\ x < -10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 2 \\ x > -10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 2 \\ x < -10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 2 \\ x > -10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 2 \\ x < -10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 2 \\ x > -10 \end{cases}$$

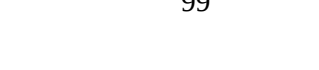
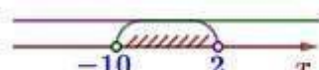
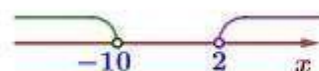
$$\begin{cases} x > 2 \\ x < -10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 2 \\ x > -10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 2 \\ x < -10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 2 \\ x > -10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 2 \\ x < -10 \end{cases}$$



решений нет

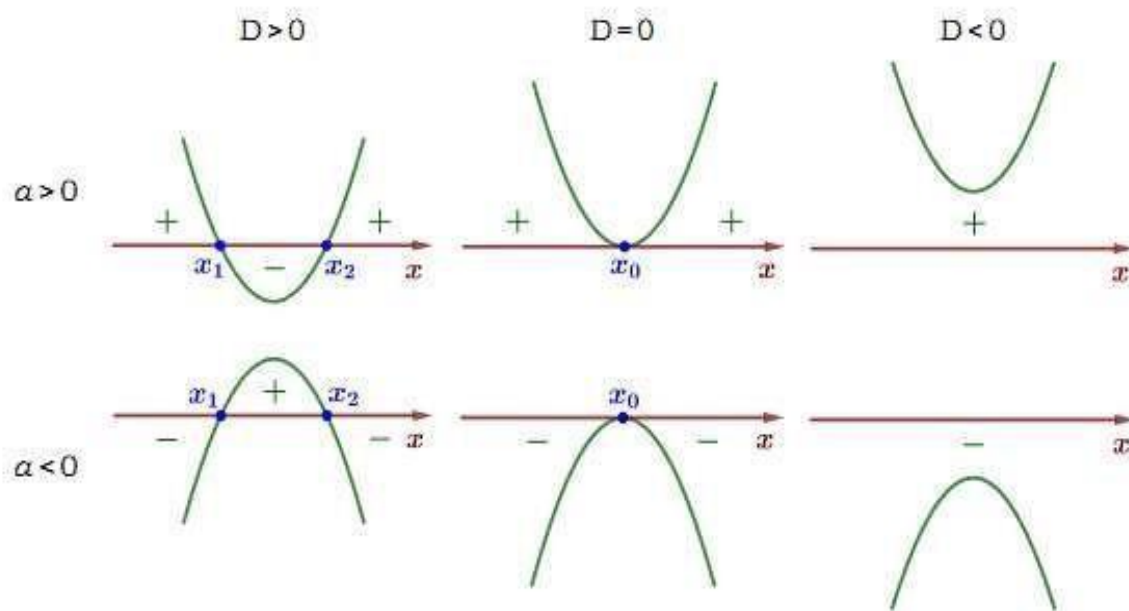
$$x \in (-10; 2)$$

Ответ: $x \in (-10; 2)$

С помощью графика квадратичной функции (2 способ)

Алгоритм:

- 1) найти действительные корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ или установить, что их нет;
- 2) определить направление ветвей параболы $y=ax^2+bx+c$;
- 3) изобразить эскиз графика квадратичной функции, используя точки пересечения (касания) с осью Ox , если они есть;
- 4) по графику определить промежутки, на которых функция принимает нужные значения.



Пример 6. Решите неравенство $x^2+12x+32 \leq 0$.

$$x^2+12x+32 \leq 0$$

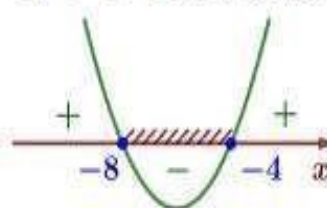
$$x^2+12x+32=0$$

$$D=b^2-4ac=12^2-4 \cdot 1 \cdot 32=16$$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-12-\sqrt{16}}{2 \cdot 1} = -8$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-12+\sqrt{16}}{2 \cdot 1} = -4$$

$a=1>0$ ветви вверх



Ответ: $x \in [-8; -4]$

Пример 7. Решите неравенство $7x-x^2 < 0$.

$$7x-x^2 < 0$$

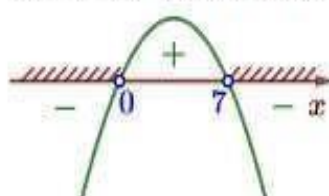
$$7x-x^2=0$$

$$x(7-x)=0$$

$$x=0 \quad 7-x=0$$

$$x=7$$

$a=-1<0$ ветви вниз



Ответ:

$x \in (-\infty; 0) \cup (7; +\infty)$

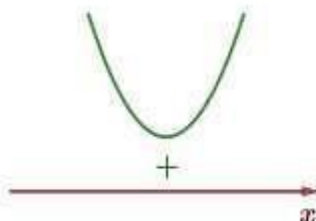
Пример 8.Решите неравенство $x^2+100<0$.

$$x^2+100<0$$

$$x^2+100=0$$

$$x^2=-100$$

корней нет

 $a=1>0$ ветви вверх

Ответ:
неравенство не
имеет решений

Метод интервалов (3 способ)Алгоритм:1) найти нули функции $y=ax^2+bx+c$, решив квадратное уравнение

$$ax^2+bx+c=0;$$

2) отметить положение нулей на оси Ox ;

3) определить знаки функции в промежутках между нулями;

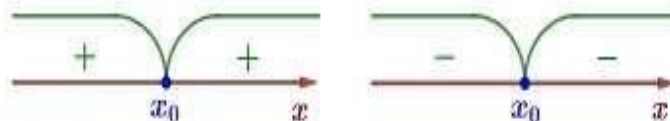
А. вычислить значение функции в точке $x=0$ (или, например, $x=1$), отметить знак в соответствующем промежутке,

В. определить знаки в остальных промежутках по правилу:

$D>0$ (2 корня)
знаки чередуются



$D=0$ (1 корень)
знаки совпадают



$D<0$ (нет корней)
функция сохраняет знак
на всей числовой оси



4) выбрать промежутки, на которых функция принимает нужные значения.

Пример 9. Решите неравенство $4x^2 \geq 9$.

$$4x^2 \geq 9$$

$$4x^2 - 9 \geq 0$$

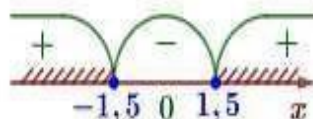
$$4x^2 - 9 = 0$$

$$(2x-3)(2x+3) = 0$$

$$2x-3=0 \quad 2x+3=0$$

$$2x=3 \quad 2x=-3$$

$$x=1,5 \quad x=-1,5$$

при $x=0$

$$4x^2 - 9 = 4 \cdot 0^2 - 9 = -9 < 0 \Rightarrow$$

на интервале $(-1,5; 1,5)$ знак " $-$ "Ответ: $x \in (-\infty; -1,5] \cup [1,5; +\infty)$

Пример 10. Решите неравенство $x^2 - 2x + 15 < 0$.

$$x^2 - 2x + 15 < 0$$

$$x^2 - 2x + 15 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15 = -56 < 0$$

корней нет

при $x=0$ $x^2 - 2x + 15 = 0^2 - 2 \cdot 0 + 15 = 15 > 0$
на всей числовой оси знак "+"



Ответ: неравенство не имеет решений

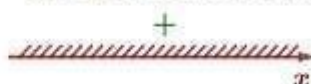
Пример 11. Решите неравенство $x^2 + 12 > 0$.

$$x^2 + 12 = 0$$

$$x^2 = -12$$

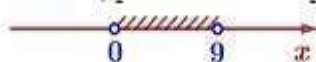
корней нет

при $x=0$ $x^2 + 12 = 0^2 + 12 = 12 > 0$
на всей числовой оси знак "+"



Ответ: $x \in \mathbb{R}$, то есть x – любое число

Пример 12. Укажите неравенство, решение которого изображено на рисунке:



1) $x^2 - 81 < 0$

2) $x^2 - 81 > 0$

3) $x^2 - 9x < 0$

4) $x^2 - 9x > 0$

Решим неравенство №1:

$$x^2 - 81 < 0$$

$$x^2 - 81 = 0$$

$$(x-9)(x+9) = 0$$

$$x-9=0$$

$$x+9=0$$

$$x=9$$

$$x=-9$$

Корни **не** совпадают с данными рисунка.

Такие же корни даст неравенство №2, поэтому его тоже можно проигнорировать.

Решим неравенство №3:

$$x^2 - 9x < 0$$

$$x^2 - 9x = 0$$

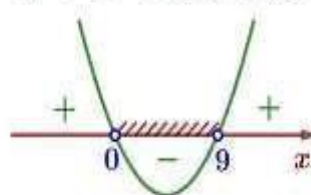
$$x(x-9) = 0$$

$$x=0$$

$$x-9=0$$

$$x=9$$

$a=1>0$ ветви вверх

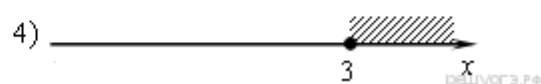


Решение совпадает с изображенным на рисунке, в ином случае верным было бы неравенство №4.

Ответ: 3

Решим сам

1. На каком рисунке изображено множество решений неравенства $x^2 - 4x + 3 \geq 0$? В ответе укажите номер правильного варианта.



2. Решение какого из данных неравенств изображено на рисунке?

В ответе укажите номер правильного варианта.



- 1) $x^2 + 4 < 0$ 2) $x^2 - 4 > 0$ 3) $x^2 + 4 > 0$ 4) $x^2 - 4 < 0$

3. Решите неравенство $x^2 + x \geq 0$.

В ответе укажите номер правильного варианта.

- 1) $(-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$ 2) $[-1; 0]$ 3) $(-1; 0)$ 4) $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$

4. Решите неравенство $x^2 - 4x < 0$.

В ответе укажите номер правильного варианта.

- 1) $[0; 4]$ 2) $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$ 3) $(0; 4)$ 4) $(-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$

5. Решите неравенство $-x^2 - 2x \leq 0$.

В ответе укажите номер правильного варианта.

- 1) $(-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$ 2) $(-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$ 3) $(-2; 0)$ 4) $[-2; 0]$

6. Решите неравенство $x^2 + 3x > 0$.

В ответе укажите номер правильного варианта.

- 1) $(-\infty; -3) \cup (0; +\infty)$ 2) $(-3; 0)$ 3) $[-3; 0]$ 4) $(-\infty; -3] \cup [0; +\infty)$

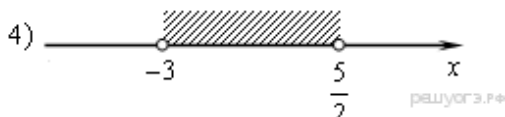
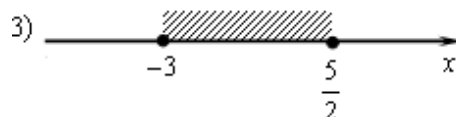
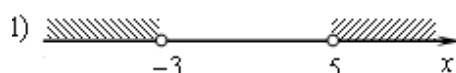
7. Решите неравенство $-x^2 + x \geq 0$.

В ответе укажите номер правильного варианта.

- 1) $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$ 2) $[0; 1]$ 3) $(0; 1)$ 4) $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$

8. На каком рисунке изображено множество решений неравенства $(2x - 5)(x + 3) \geq 0$?

В ответе укажите номер правильного варианта.



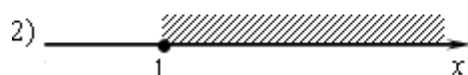
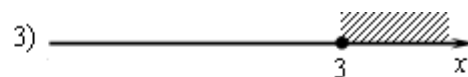
9. Решите неравенство $x^2 < 361$.

В ответе укажите номер правильного варианта.

- 1) $(-\infty; -19) \cup (19; +\infty)$ 2) $(-\infty; -19] \cup [19; +\infty)$ 3) $(-19; 19)$ 4) $[-19; 19]$

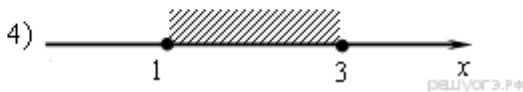
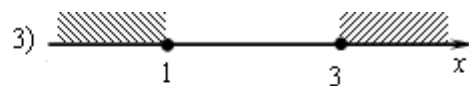
10. На каком рисунке изображено множество решений неравенства $x^2 - 4x + 3 \geq 0$?

В ответе укажите номер правильного варианта.



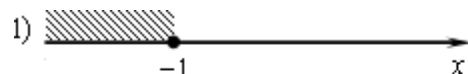
11. На каком рисунке изображено множество решений неравенства $x^2 - 4x + 3 \leq 0$?

В ответе укажите номер правильного варианта.



12. На каком рисунке изображено множество решений неравенства $x^2 - 3x - 4 \geq 0$?

В ответе укажите номер правильного варианта.



13. Решение какого из данных неравенств изображено на рисунке?

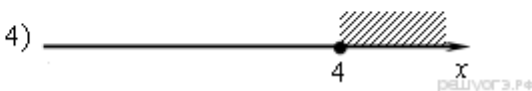
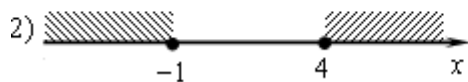
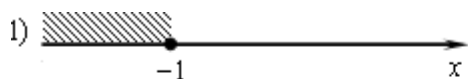
В ответе укажите номер правильного варианта.



- 1) $x^2 - 9 > 0$ 2) $x^2 + 9 > 0$ 3) $x^2 - 9 < 0$ 4) $x^2 + 9 < 0$

14. На каком рисунке изображено множество решений неравенства $x^2 - 3x - 4 \leq 0$?

В ответе укажите номер правильного варианта.



15.



Решение какого из данных неравенств изображено на рисунке?

В ответе укажите номер правильного варианта.

- 1) $x^2 + 9 < 0$ 2) $x^2 + 9 > 0$ 3) $x^2 - 9 < 0$ 4) $x^2 - 9 > 0$

16.



Решение какого из данных неравенств

изображено на рисунке?

В ответе укажите номер правильного варианта.

- 1) $x^2 + 4 < 0$ 2) $x^2 - 4 > 0$ 3) $x^2 + 4 > 0$ 4) $x^2 - 4 < 0$

17. Решите неравенство: $x^2 + 23x \leq 0$.

В ответе укажите номер правильного варианта.

- 1) $(-\infty; -23) \cup (0; +\infty)$ 2) $(-\infty; -23] \cup [0; +\infty)$ 3) $(-23; 0)$ 4) $[-23; 0]$

18. Решите неравенство: $x^2 + 15x > 0$

В ответе укажите номер правильного варианта.

- 1) $(-\infty; -15) \cup (0; +\infty)$ 2) $(-\infty; -15] \cup [0; +\infty)$ 3) $(-15; 0)$ 4) $[-15; 0]$

19. Решите неравенство: $x^2 > 529$.

В ответе укажите номер правильного варианта.

- 1) $(-\infty; -23) \cup (23; +\infty)$ 2) $(-\infty; -23] \cup [23; +\infty)$ 3) $(-23; 23)$ 4) $[-23; 23]$

Используемый ресурс:

1. Яценко И. В., Шестаков С. А. ОГЭ по математике от А до Я. Модульный курс. Алгебра.—М.: МЦНМО, 2019.—224 с.

2. Е. А. Ширяева (www.time4math.ru) Задачник (ОГЭ 2021)

3. СДАМ ГИА: РЕШУ ОГЭ Образовательный портал для подготовки к экзаменам Математика

Занятие 18, 19

Задачи на прогрессии. Формат 2021. Задачи ОГЭ №14

ОГЭ по математике представляет собой задачу на числовые последовательности, прежде всего на арифметическую или геометрическую прогрессию. Напомним, что числовой последовательностью называется набор чисел, для которых указан порядок их следования, т. е. каждому из чисел набора приписан определённый порядковый номер, причём любые два числа из набора (даже если они равны) имеют разные номера. Иными словами, последовательность—это не что иное, как функция, определённая на множестве натуральных чисел. График такой функции представляет собой множество точек с натуральными абсциссами, ординаты которых находятся по определённому правилу. Это правило, как и в случае любой другой функции, может быть дано в виде описания, таблицы, формулы либо даже сразу в виде самого графика. Обычно последовательность обозначается (a_n) или $\{a_n\}$. Скобки указывают именно на обозначение последовательности, а их отсутствие, т. е. запись a_n , означает, что речь идёт об n -м члене последовательности. Арифметической прогрессией называется числовая последовательность, каждый член которой начиная со второго равен предыдущему, сложенному с одним и тем же для данной последовательности числом d , называемым разностью прогрессии. Разность арифметической прогрессии может быть любым числом: положительным, отрицательным, нулём. Таким образом, для того чтобы однозначно определить арифметическую прогрессию, достаточно знать какой-то её член и разность, т. е. арифметическая прогрессия задаётся двумя элементами. В самых простых и стандартных случаях это первый член прогрессии и её разность. На числовой прямой члены арифметической прогрессии с разностью, отличной от нуля, изображаются точками, расстояние между двумя любыми соседними из которых равно $|d|$. Из определения арифметической прогрессии вытекают формула её n -го члена

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

и формула суммы S_n её первых n членов

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

При решении некоторых задач могут оказаться полезными следующие свойства, также вытекающие из определения арифметической прогрессии:

1) для непостоянной прогрессии $a_k + a_l = a_p + a_q$ в том и только том случае, если $k+l = p+q$, т. е. сумма двух любых членов арифметической прогрессии равна сумме двух любых других её членов с той же суммой индексов;

2) $a_k = \frac{a_{k-m} + a_{k+m}}{2}$ (здесь $k > m$), т. е. каждый член арифметической прогрессии начиная со второго есть среднее арифметическое двух равноотстоящих от него членов этой прогрессии; в частности, каждый член арифметической прогрессии начиная со второго равен среднему арифметическому двух соседних с ним членов этой прогрессии. Обратим внимание на то, что если для какой-то числовой последовательности выполнено свойство 2, то эта последовательность является арифметической прогрессией, поэтому свойство 2 иногда называют характеристическим свойством арифметической прогрессии.

Перейдём к примерам.

1. Бригада маляров красит забор длиной 240 метров, ежедневно увеличивая норму покраски на одно и то же число метров. Известно, что за первый и последний день в сумме бригада покрасила 60 метров забора. Определите, сколько дней бригада маляров красила весь забор.

Решение.

Пусть бригада в первый день покрасила a_1 метров забора, во второй — a_2 , ..., в последний — a_n метров забора. Тогда $a_1 + a_n = 60$ м, а за n дней было покрашено

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = 30n \text{ метров забора.}$$

Поскольку всего было покрашено 240 метров забора, имеем: $30n = 240 \Leftrightarrow n = 8$. Таким образом, бригада красила забор в течение 8 дней.

Ответ: 8.

2. Рабочие прокладывают тоннель длиной 500 метров, ежедневно увеличивая норму прокладки на одно и то же число метров. Известно, что за первый день рабочие проложили 3 метра тоннеля. Определите, сколько метров тоннеля проложили рабочие в последний день, если вся работа была выполнена за 10 дней.

Решение.

Пусть рабочие в первый день проложили a_1 метров тоннеля, во второй — a_2 , ..., в последний — a_{10} метров тоннеля. Длина

тоннеля $S_n = 500$ метров. $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$, $n = 10$ дней. Тогда в последний день рабочие проложили

$$a_{10} = \frac{2S_n}{n} - a_1 = \frac{1000}{10} - 3 = 97 \text{ метров.}$$

Таким образом, рабочие в последний день проложили 97 метров тоннеля.

Ответ: 97.

3. Васе надо решить 434 задачи. Ежедневно он решает на одно и то же количество задач больше по сравнению с предыдущим днем. Известно, что за первый день Вася решил 5 задач. Определите, сколько задач решил Вася в последний день, если со всеми задачами он справился за 14 дней.

Решение.

В первый день Вася решил $a_1 = 5$ задач, в последний — a_{14} задач. Всего надо решить $S_{14} = 434$ задач. Поскольку $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}n$, где $a_1 = 5, n = 14$ имеем:

$$S_{14} = \frac{a_1 + a_{14}}{2} \cdot 14 = 7(5 + a_{14}).$$

Тогда

$$7(5 + a_{14}) = 434 \Leftrightarrow 5 + a_{14} = 62 \Leftrightarrow a_{14} = 57 \text{ задач.}$$

Ответ: 57.

4. Турист идет из одного города в другой, каждый день проходя больше, чем в предыдущий день, на одно и то же расстояние. Известно, что за первый день турист прошел 10 километров. Определите, сколько километров прошел турист за третий день, если весь путь он прошел за 6 дней, а расстояние между городами составляет 120 километров.

Решение.

В первый день турист прошел $a_1 = 10$ км, во второй — a_2 , ..., в последний — a_6 км. Всего он прошел $S_n = 120$ км. Если каждый день турист проходил больше, чем в предыдущий день, на d км, то

$$S_n = \frac{2a_1 + d \cdot (n - 1)}{2}n,$$

где $n = 6$ дней, $a_1 = 10$ км. Таким образом,

$$\frac{2 \cdot 10 + 5d}{2} \cdot 6 = 120 \Leftrightarrow 5d = 20 \Leftrightarrow d = 4.$$

Тогда за третий день турист прошел

$$a_3 = a_1 + 2d = 10 + 2 \cdot 4 = 18 \text{ км.}$$

Ответ: 18.

5. Грузовик перевозит партию щебня массой 210 тонн, ежедневно увеличивая норму перевозки на одно и то же число тонн. Известно, что за первый день было перевезено 2 тонны щебня. Определите, сколько тонн щебня было перевезено за девятый день, если вся работа была выполнена за 14 дней.

Решение.

Пусть в первый день грузовик перевез $a_1 = 2$ тонны щебня, во второй — a_2 , ..., в последний — a_{14} тонн; всего было перевезено $S_{14} = 210$ тонн; норма перевозки увеличивалась ежедневно на d тонн. Таким образом,

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{2a_1 + d \cdot (n-1)}{2} \cdot n \\ S_{14} &= \frac{2a_1 + d \cdot (14-1)}{2} \cdot 14 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 210 &= \frac{2 \cdot 2 + 13d}{2} \cdot 14 \Leftrightarrow 30 = 4 + 13d \Leftrightarrow d = 2. \end{aligned}$$

Имеем:

$$a_9 = a_1 + 8d = 2 + 8 \cdot 2 = 18.$$

Следовательно, за девятый день было перевезено 18 тонн щебня.

Ответ: 18.

6. Улитка ползет от одного дерева до другого. Каждый день она проползает на одно и то же расстояние больше, чем в предыдущий день. Известно, что за первый и последний дни улитка проползла в общей сложности 10 метров. Определите, сколько дней улитка потратила на весь путь, если расстояние между деревьями равно 150 метрам.

Решение.

Пусть улитка проползла в первый день a_1 метров, во второй — a_2 , ..., в последний — a_n метров. Тогда $a_1 + a_n = 10$ м, а за n дней

проползла $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = 5n$ метров. Поскольку всего она проползла 150 метров, имеем: $5n = 150$, откуда $n = 30$. Таким образом, улитка потратила на весь путь 30 дней.

Ответ: 30.

7. Вере надо подписать 640 открыток. Ежедневно она подписывает на одно и то же количество открыток больше по сравнению с предыдущим днем. Известно, что за первый день Вера подписала 10 открыток. Определите, сколько открыток было подписано за четвертый день, если вся работа была выполнена за 16 дней.

Решение.

В первый день Вера подписала $a_1 = 10$ открыток, во второй — a_2 , ..., в последний — a_{16} открыток. Всего было подписано $S_n = 640$ открыток. Если количество подписываемых открыток увеличивалось на d каждый день, то

$$S_n = \frac{2a_1 + d \cdot (n-1)}{2} n \Leftrightarrow 640 = \frac{2 \cdot 10 + 15d}{2} \cdot 16 \Leftrightarrow 80 = 20 + 15d \Leftrightarrow d = 4.$$

Тогда

$$a_4 = a_1 + 3d = 10 + 3 \cdot 4 = 22.$$

Следовательно, за четвертый день было подписано 22 открытки.

Ответ: 22.

8. Бизнесмен Бубликов получил в 2000 году прибыль в размере 5000 рублей. Каждый следующий год его прибыль увеличивалась на 300% по сравнению с предыдущим годом. Сколько рублей заработал Бубликов за 2003 год?

Решение.

Поскольку каждый год прибыль увеличивалась на 300%, она увеличивалась в 4 раза по сравнению с предыдущим годом. Ищем четвертый член геометрической прогрессии: за 2003 год Бубликов заработал $5000 \cdot 4^3 = 320\,000$ руб.

Ответ: 320 000.

Примечание.

Прибыли можно было найти последовательно: за 2001 год — 20 тыс. руб., за 2002 год — 80 тыс. руб., за 2003 год — 320 тыс. руб.

9. Компания «Альфа» начала инвестировать средства в перспективную отрасль в 2001 году, имея капитал в размере 5000 долларов. Каждый год, начиная с 2002 года, она получала прибыль, которая составляла 200% от капитала предыдущего года. А компания «Бета» начала инвестировать средства в другую отрасль в 2003 году, имея капитал в размере 10 000 долларов, и, начиная с 2004 года, ежегодно получала прибыль, составляющую 400% от капитала предыдущего года. На сколько долларов капитал одной из компаний был больше капитала другой к концу 2006 года, если прибыль из оборота не изымалась?

Решение.

Каждый год прибыль компании «Альфа» составляла 200% от капитала предыдущего года, значит, капитал каждый год составлял 300% от капитала предыдущего года. В конце 2006 года на счёте компании «Альфа» была сумма

$$5000 \cdot 3^{2006-2001} = 5000 \cdot 3^5 = 5000 \cdot 243 = 1\,215\,000 \text{ долларов.}$$

Каждый год прибыль компании «Бета» составила 400% от капитала предыдущего года, значит, капитал каждый год составлял 500% от капитала предыдущего года. В конце 2006 года на счёте компании «Бета» была сумма

$$10\,000 \cdot 5^{2006-2003} = 10\,000 \cdot 5^3 = 10\,000 \cdot 125 = 1\,250\,000.$$

Таким образом, капитал компании «Бета» был на 35 000 долларов больше.

Ответ: 35 000.

10. Вика решила начать делать зарядку каждое утро. В первый день она сделала 30 приседаний, а в каждый следующий день она делала на одно и то же количество приседаний больше, чем в предыдущий день. За 15 дней она

сделала всего 975 приседаний. Сколько приседаний сделала Вика на пятый день?

Решение.

Вика в первый день сделала 30 приседаний, значит $a_1 = 30$, во второй — a_2 , ..., в последний — a_n приседаний. Тогда $S_n = 975$ приседаний. Так

как $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}n$, получим, что Вика увеличивала на

$$975 = \frac{2 \cdot 30 + d(15-1)}{2} \cdot 15 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{975 \cdot 2}{15} = 60 + 14d \Leftrightarrow 130 - 60 = 14d \Leftrightarrow 70 = 14d \Leftrightarrow d = 5$$

приседаний в

день.

Зная d , найдем a_5 :

$$a_5 = a_1 + d(n-1) \Rightarrow a_5 = 30 + 5(5-1) = 30 + 20 = 50.$$

Ответ: 50.

11. Хозяин договорился с рабочими, что они выкопают ему колодец на следующих условиях: за первый метр он заплатит им 4200 рублей, а за каждый следующий метр — на 1300 рублей больше, чем за предыдущий. Сколько рублей хозяин должен будет заплатить рабочим, если они выкопают колодец глубиной 11 метров?

Решение.

Последовательность цен за метр — арифметическая прогрессия с первым членом $a_1 = 4200$ и разностью $d = 1300$. Сумма

первых n членов арифметической прогрессии вычисляется по формуле $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2}n$. В нашем случае имеем:

$$S_{11} = \frac{2 \cdot 4200 + 10 \cdot 1300}{2} \cdot 11 = 117\,700.$$

Тем самым, цена работы составляет 117 700 руб.

Ответ: 117 700.

12. В первом ряду кинозала 24 места, а в каждом следующем на 2 больше, чем в предыдущем. Сколько мест в восьмом ряду?

Решение.

Число мест в ряду представляет собой арифметическую прогрессию с первым членом $a_1 = 24$ и разностью $d = 2$. Член арифметической прогрессии с номером k может быть найден по формуле

$$a_k = a_1 + (k-1) \cdot d.$$

Необходимо найти a_8 , имеем:

$$a_8 = a_1 + (8-1) \cdot d = 24 + 7 \cdot 2 = 38.$$

Ответ: 38.

13. Тренер посоветовал Андрею в первый день занятий провести на беговой дорожке 15 минут, а на каждом следующем занятии увеличивать время, проведённое на беговой дорожке, на 7 минут. За сколько занятий Андрей проведёт на беговой дорожке в общей сложности 2 часа 25 минут, если будет следовать советам тренера?

Решение.

Время, проведённое на беговой дорожке представляет собой арифметическую прогрессию с первым членом равным 15 и разностью 7. Сумма n членов арифметической прогрессии может быть найдена по формуле:

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}n \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2 \cdot 60 + 25 = \frac{2 \cdot 15 + 7(n-1)}{2}n \Leftrightarrow 290 = 30n + 7n^2 - 7n.$$

Получили квадратное уравнение на n , решим его:

$$7n^2 + 23n - 290 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n < 0, \\ n = 5. \end{cases}$$

По условию задачи подходит значение $n = 5$.

Ответ: 5.

14. Врач прописал пациенту принимать лекарство по такой схеме: в первый день он должен принять 3 капли, а в каждый следующий день — на 3 капли больше, чем в предыдущий. Приняв в день 30 капель, он ещё 3 дня пьёт по 30 капель лекарства, а потом ежедневно уменьшает приём на 3 капли. Сколько пузырьков лекарства нужно купить пациенту на весь курс приёма, если в каждом содержится 20 мл лекарства (что составляет 250 капель)?

Решение.

На первом этапе приёма капель число принимаемых капель в день представляет собой возрастающую арифметическую прогрессию с первым членом, равным 3, разностью, равной 3 и последним членом, равным 30. Следовательно,

этап, когда число капель в день возрастает
 $\frac{30-3}{3} + 1 = 10$ дней.

продолжается Суммарное число капель, принятых в этот период, представляет собой сумму арифметической прогрессии:

$$S_{10} = \frac{3+30}{2} \cdot 10 = 165 \text{ капель.}$$

Затем в течение трёх дней пациент принимает ещё $3 \cdot 30 = 90$ капель. Последний этап приёма капель длится $\frac{27-3}{3} + 1 = 9$ дней. Аналогично первому этапу:

$$S_9 = \frac{3+27}{2} \cdot 9 = 135 \text{ капель.}$$

Таким образом, за весь курс приёма пациенту нужно принять $165 + 90 + 135 = 390$ капель. То есть нужно приобрести не меньше $\frac{390}{250} = 1\frac{14}{25}$ пузырьков лекарства. Минимальное количество пузырьков лекарства — 2.

Ответ: 2.

15. В соревновании по стрельбе за каждый промах в серии из 25 выстрелов стрелок получал штрафные очки: за первый промах — одно штрафное очко, за каждый последующий — на 0,5 очка больше, чем за предыдущий. Сколько раз попал в цель стрелок, получивший 7 штрафных очков?

Решение.

Количество начисляемых штрафных очков представляет собой арифметическую прогрессию с первым членом $a_1 = 1$ и разностью $d = 0,5$.

Сумма n первых членов этой прогрессии $\frac{2 \cdot a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$ равна 7:

$$\begin{aligned} \frac{2 \cdot 1 + (n-1) \cdot 0,5}{2} \cdot n = 7 &\Leftrightarrow n \cdot (2 + 0,5(n-1)) = 14 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0,5n^2 + 1,5n - 14 = 0 \Leftrightarrow n^2 + 3n - 28 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 4, \\ n = -7. \end{cases} \end{aligned}$$

Поскольку n является положительным числом, стрелок совершил 4 промаха, а значит, 21 попадание.

Ответ: 21.

16. Улитка ползет вверх по дереву, начиная от его основания. За первую минуту она проползла 30 см, а за каждую следующую минуту — на 5 см больше, чем за предыдущую. За сколько минут улитка достигнет вершины дерева высотой 5,25 м? В ответе укажите число минут.

Решение.

Всего улитка проползла 5,25 м или 525 см. Последовательность пройденных расстояний представляет собой арифметическую прогрессию с первым членом $a_1 = 30$ и разностью $d = 5$.

Сумма n первых членов этой прогрессии $\frac{2 \cdot a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$ равна 525:

$$\frac{2 \cdot 30 + (n-1)5}{2} \cdot n = 525 \Leftrightarrow n \cdot (60 + 5(n-1)) = 1050 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5n^2 + 55n - 1050 = 0 \Leftrightarrow n^2 + 11n - 210 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 10, \\ n = -21. \end{cases}$$

Поскольку n является положительным числом, получим, что за 10 минут улитка достигнет вершины дерева.

Ответ: за 10 минут.

17. Альпинисты в первый день восхождения поднялись на высоту 1400 м, а затем каждый следующий день поднимались на высоту на 100 м меньше, чем в предыдущий. За сколько дней они покорили высоту 5000 м?

Решение.

Последовательность пройденных расстояний представляет собой арифметическую прогрессию с первым членом $a_1 = 1400$ и разностью $d = -100$. Сумма n первых членов этой

прогрессии $\frac{2 \cdot a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$ равна 5000:

$$\frac{2 \cdot 1400 + (n-1) \cdot (-100)}{2} \cdot n = 5000 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n \cdot (2800 + (-100)(n-1)) = 10000 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 100n^2 - 2900n + 10000 = 0 \Leftrightarrow n^2 - 29n + 100 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 4, \\ n = 25. \end{cases}$$

Следовательно, через 4 дня альпинисты достигнут вершины.

Ответ: за 4 дня.

18. Клиент взял в банке кредит в размере 50 000 р. на 5 лет под 20% годовых. Какую сумму он должен вернуть в банк в конце срока, если весь кредит с процентами возвращается в банк после срока?

Решение.

Пусть $S_0 = 50\,000$ руб., $r = 0,2$. Тогда сумма S (в рублях), которую необходимо вернуть, составляет

$$S = (1 + r)^5 \cdot S_0 = (1 + 0,2)^5 \cdot 50\,000 = 124\,416 \text{ рублей.}$$

Ответ: 124 416 руб.

19. Бактерия, попав в живой организм, к концу 20-й минуты делится на две бактерии, каждая из них к концу следующих 20 минут делится опять на две и т. д. Сколько бактерий окажется в организме через 4 часа, если по истечении четвертого часа в организм из окружающей среды попала еще одна бактерия?

Решение.

В четырех часах двенадцать 20-минутных интервалов, следовательно, произойдет 12 циклов деления бактерий. Количество бактерий составляет геометрическую прогрессию с первым членом 1 и знаменателем 2, поэтому через 12 циклов деления количество бактерий составит

$$b_{13} = b_1 \cdot q^{12} = 1 \cdot 2^{12} = 4096.$$

После того, как в организм попадет еще одна бактерия, их количество составит $4096 + 1 = 4097$.

Ответ: 4097 бактерий.

20. Однажды богач заключил выгодную, как ему казалось, сделку с человеком, который в течение 15 дней ежедневно должен был приносить по 1000 р., а взамен в первый день богач должен был отдать 10 р., во второй — 20 р., в третий — 40 р., в четвертый — 80 р. и т. д. в течение 15 дней. Сколько денег получил богач и сколько он отдал? Кто выиграл от этой сделки? В ответ запишите, сколько рублей потерял богач за 15 дней.

Решение.

Пусть $S_0 = 10$ р. Тогда богач

$$S_{15} = \frac{b_1(q^{15} - 1)}{2 - 1} = \frac{10 \cdot (2^{15} - 1)}{2 - 1} = 327\,670$$
 р.
отдал

В то же время, богач получил $1000 \cdot 15 = 15\,000$ р. Получим, что богач потерял $327\,670 - 15\,000 = 312\,670$ р.

Ответ: 312 670 р.

21. На биржевых торгах в понедельник вечером цена акции банка «Городской» повысилась на некоторое количество процентов, а во вторник произошло снижение стоимости акции на то же число процентов. В результате во вторник вечером цена акции составила 99% от ее первоначальной цены в понедельник утром. На сколько процентов менялась котировка акции в понедельник и во вторник?

Решение.

Обозначим за q процент изменения цены. Повышение цены акции в понедельник составит $b_2 = b_1(1 + q)$. Понижение цены акции во вторник составит $b_3 = b_2(1 - q)$, кроме того из условия известно, что после понижения цены стоимость акции составила $b_3 = 0,99 \cdot b_1$. Составим уравнение и найдем процент котировки цены.

$$0,99 \cdot b_1 = b_1(1 + q)(1 - q) \Leftrightarrow 0,99 = 1 - q^2 \Leftrightarrow q^2 = 0,01 \Leftrightarrow q = 0,1.$$

Таким образом, котировка изменилась на 10%.

Ответ: 10%.

22. Мать дарит каждой из пяти своих дочерей в день рождения, начиная с пяти лет, столько книг, сколько дочери лет. Возрасты пяти дочерей составляют арифметическую прогрессию, разность которой равна 2. Сколько было лет каждой дочери, когда у них составила библиотека общей численностью в 495 книг? Сколько лет старшей дочери?

Решение.

Обозначим за x возраст самой младшей дочери на момент, когда у них стало 495 книг, тогда возраст остальных дочерей составил $x + 2$, $x + 4$, $x + 6$ и $x + 8$ лет. Тогда

$$\begin{aligned}
 & 5 + 6 + \dots + x + 5 + 6 + \dots + (x + 2) + \dots + 5 + 6 + \dots + x + 8 = \\
 &= \frac{x(x+1)}{2} - 1 - 2 - 3 - 4 + \frac{(x+2)(x+3)}{2} - 1 - 2 - 3 - 4 + \dots + \frac{(x+8)(x+9)}{2} - 1 - 2 - 3 - 4 = \\
 &= \frac{x(x+1) + (x+2)(x+3) + (x+4)(x+5) + (x+6)(x+7) + (x+8)(x+9)}{2} - 50 = \\
 &= \frac{5x^2 + 45x + 40}{2}.
 \end{aligned}$$

Решим уравнение:

$$5x^2 + 45x + 40 = 990 \Leftrightarrow 5x^2 + 45x - 950 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 10, \\ n = -19. \end{cases}$$

Это верно при $x = 10$, значит старшей дочери было 18 лет.

Ответ: 18 лет.

23. Для асфальтирования участка длиной 99 м используются 2 катка. Первый каток был установлен в одном конце участка, второй — в противоположном. Работать они начали одновременно. Первый каток в каждую минуту проходил 5 м, а второй каток за первую минуту прошел 1,5 м, а за каждую следующую минуту проходил на 0,5 м больше, чем за предыдущую. Через сколько минут катки встретились?

Решение.

Пусть катки встретились через n минут. Первый каток движется равномерно, поэтому к моменту встречи пройдет $5n$ метров. Расстояние, пройденное вторым катком, является суммой n первых членов арифметической прогрессии с первым членом 1,5 и разностью 0,5. Тогда $S_n + 5n = 99$, откуда получаем:

$$\frac{2 \cdot 1,5 + 0,5(n-1)}{2} \cdot n + 5n = 99 \Leftrightarrow n^2 + 25n - 396 = 0 \Leftrightarrow_{n>0} n = 11.$$

Тем самым катки встретятся через 11 минут.

Ответ: 11.

24. В сосуде имеется несколько одинаковых кранов, которые открывают один за другим через равные промежутки времени. Через 8 часов после того, как был включен последний кран, сосуд был заполнен. Время, в течение

которого были открыты первый и последний краны относятся как 5 : 1. Через сколько времени заполнится сосуд, если открыть все краны одновременно?

Решение.

Пусть первый кран работал $(n - 1)d + 8$ часов, тогда второй кран работал $(n - 2)d + 8$ часов, ..., n -й кран — 8 часов. Тогда

$$\frac{(n - 1)d + 8}{8} = \frac{5}{1} \Leftrightarrow (n - 1)d = 32,$$

$$(n - 1)d + 8 + (n - 2)d + 8 + \dots + 8 = d \cdot \frac{(n - 1)n}{2} + 8n = 16n + 8n = 24n.$$

Получаем, что для заполнения сосуда требуется $24n$ часов работы. Если все краны открываются одновременно, то для пополнения всего сосуда

потребуется $\frac{24n}{n} = 24$ часа.

Ответ: 24 часа.

25. Бригада рабочих могла выполнить всю работу за 24 ч, если бы работали одновременно все рабочие. Однако по плану в первый час работал один рабочий, во второй час — 2 рабочих, в третий — 3 и т. д. до тех пор, пока в работу не включились все рабочие. И только несколько часов перед завершением работала вся бригада. Время работы, предусмотренное планом, было бы сокращено на 6 часов, если бы с самого начала работы работала бы вся бригада, за исключением пяти рабочих. Найдите количество рабочих.

Решение.

Всего рабочих n . Тогда вся работа — $24n$. Время работы по плану — x . Тогда:

$$x + (x - 1) + \dots + (x - (n - 1)) = \left(x + \frac{1 - n}{2}\right)n = 24n \Leftrightarrow x = \frac{n + 47}{2}.$$

Найдем количество рабочих:

$$(x - 6)(n - 5) = 24n; \frac{n + 35}{2}(n - 5) = 24n \Leftrightarrow n^2 + 30n - 175 = 48n \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow n^2 - 18n - 175 = 0, n > 0 \Leftrightarrow n = 25.$$

Ответ: 25 рабочих.

26. Алик, Миша и Вася покупали блокноты и трехкопеечные карандаши. Алик купил 2 блокнота и 4 карандаша, Миша — блокнот и 6 карандашей, Вася — блокнот и 3 карандаша. Оказалось, что суммы, которые уплатили Алик, Миша и Вася, образуют геометрическую прогрессию. Сколько стоит блокнот?

Решение.

Обозначим цену блокнота за x . Алик заплатил $2x + 12$, Миша — $x + 18$, Вася — $x + 9$. Тогда:

$$\frac{2x + 12}{x + 18} = \frac{x + 18}{x + 9} \Leftrightarrow (2x + 12)(x + 9) = (x + 18)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 30x + 108 = x^2 + 36x + 324 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 216 = 0, x > 0 \Leftrightarrow x = 18.$$

Ответ: 18 копеек.

27. Три конькобежца, скорости которых в некотором порядке образуют геометрическую прогрессию, одновременно стартуют (из одного места) по кругу. Через некоторое время второй конькобежец обгоняет первого, пробежав на 400 метров больше его. Третий конькобежец пробегает то

расстояние, который пробежал первый к моменту обгона его вторым, за время на $\frac{2}{3}$ мин больше, чем первый. Найдите скорость первого конькобежца.

Решение.

Из условия видно, что скорость 2-го конькобежца наибольшая, а 3-го — наименьшая. Обозначим за b скорость третьего конькобежца.

	скорость (м/мин)
1-й конькобежец	qb
2-й конькобежец	q^2b
3-й конькобежец	b

Где $q > 1$, $b > 0$, t — время, за которое второй обгоняет первого.

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} t(q^2b - qb) = 400, \\ tqb = \left(t + \frac{2}{3}\right) \cdot b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} tqb(q - 1) = 400, (1) \\ t(q - 1) = \frac{2}{3}. (2) \end{cases}$$

Разделим (1) на (2): $qb = \frac{400 \cdot 3}{2} = 600$ м/мин — скорость первого конькобежца.

Ответ: 600 м/мин.

28. Ваня, Миша, Алик и Вадим ловили рыбу. Оказалось, что количества рыб, пойманных каждым из них, образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Если бы Алик поймал столько же рыб, сколько Вадим, а Вадим поймал бы на 12 рыб больше, то количества рыб, пойманных юношами, образовали бы в том же порядке геометрическую прогрессию. Сколько рыб поймал Миша?

Решение.

Пусть Ваня поймал b_1 рыб.

Арифметическая прогрессия: $b_1, b_1 + q, b_1 + 2q, b_1 + 3q$.

Геометрическая прогрессия: $b_1, b_1 + q, b_1 + 3q, b_1 + 3q + 12$.

$$\frac{b_1 + 3q}{b_1 + q} = \frac{b_1 + q}{b_1} \Leftrightarrow b_1^2 + 3b_1q = b_1^2 + 2b_1q + q^2 \Leftrightarrow q(b_1 - q) = 0 \Leftrightarrow b_1 = q.$$

1.

$$2. \frac{b_1 + 3q + 12}{b_1 + 3q} = \frac{b_1 + 3q}{b_1 + q} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4b_1 + 12}{4q} = \frac{4q}{2q} = q \Leftrightarrow 8q = 4b_1 + 12 \Leftrightarrow q = 3 = b_1.$$

Тогда Миша поймал $3 + 3 = 6$ рыб.

Ответ: 6 рыб.

29. При свободном падении тело прошло в первую секунду 5 м, а в каждую следующую на 10 м больше. Найдите глубину шахты, если свободно падающее тело достигло его дна через 5 с после начала падения.

Решение.

Составим математическую модель задачи: в первую секунду — 5 м, во вторую секунду — 15 м, в третью секунду — 25 м, в четвертую секунду — 35 м, в пятую секунду — 45 м.

Всего за пять секунд — $5 + 15 + 25 + 35 + 45 = 125$ (м).

Ответ: глубина шахты 125 м.

30. Два приятеля положили в банк по 10000 рублей каждый, причем первый положил деньги на вклад с ежеквартальным начислением 10 %, а второй — с ежегодным начислением 45%. Через год приятели получили деньги вместе с причитающимися им процентами. Кто получил большую прибыль? В ответе напишите «первый» или «второй».

Решение.

Обозначим сумму, которую вложил каждый из приятелей за S_0 . Через год у первого на счету будет $S_0 \cdot 1,1^4$ рублей или $S_0 \cdot 1,4641$ рублей, а у второго — $S_0 \cdot 1,45$ рублей. Таким образом получаем, что большую прибыль получит первый приятель.

Ответ: первый приятель.

31. За изготовление и установку нижнего железобетонного кольца колодца заплатили 234 рубля, а за каждое следующее кольцо платили на 18 рублей меньше, чем за предыдущее. Кроме того, по окончании работы была выплачена премия 360 рублей. Средняя стоимость изготовления и установки одного кольца с учетом премии оказалась равна 202 рубля. Сколько колец было установлено?

Решение.

Пусть за изготовление и установку всех колец заплатили S_n . Тогда

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} n = \frac{2 \cdot 234 - (n-1) \cdot 18}{2} n = (243 - 9n)n.$$

Средняя стоимость установки одного кольца с учетом премии равна 202

рубля, а значит,
$$\frac{360 + S_n}{n} = 202.$$

Получаем:

$$360 + (243 - 9n)n = 202n \Leftrightarrow 360 + 243n - 9n^2 = 202n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9n^2 - 41n - 360 = 0 \Leftrightarrow n = 9, \quad n > 0$$

Следовательно, было установлено 9 колец.

Ответ: 9.

32.



При хранении бревен их укладывают, как показано на рисунке. Сколько бревен находится в одной кладке, если в ее основании положено 12 бревен?

Решение.

Количества бревен в рядах представляют собой арифметическую прогрессию с первым членом 12 и последним членом 1. Найдем сумму этой прогрессии:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{12 + 1}{2} \cdot 12 = 13 \cdot 6 = 78.$$

Ответ: 78 бревен.

Используемый ресурс:

1. Ященко И. В., Шестаков С. А. ОГЭ по математике от А до Я. Модульный курс. Алгебра.—М.: МЦНМО, 2019.—224 с.
2. СДАМ ГИА: РЕШУ ОГЭ Образовательный портал для подготовки к экзаменам Математика

Геометрия

Занятие 20

Треугольники и их элементы. Задачи ОГЭ №15

Задание 15 ОГЭ по математике—это несложная планиметрическая задача в одно-два действия, проверяющая владение базовыми знаниями по теме «Треугольники». Для успешного решения задачи достаточно знать, чему равна сумма углов треугольника, что такое медиана, биссектриса, высота, средняя линия треугольника, какова связь между длинами средней линии треугольника и параллельной ей стороны, уметь применять теорему Пифагора для вычисления одной из сторон прямоугольного треугольника по двум другим его сторонам, понимать, что такое равнобедренный и равносторонний треугольники, и уметь применять их простейшие свойства к решению задач.

Напомним основные факты, связанные с треугольниками:

- сумма углов треугольника равна 180° ;
- внешний угол треугольника равен сумме двух не смежных с ним внутренних углов треугольника;
- высоты треугольника пересекаются в одной точке;
- биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке (эта точка является центром вписанной окружности треугольника);
- серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке (эта точка является центром описанной окружности треугольника);
- медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $2 : 1$, считая от вершин треугольника;
- средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна её половине.

УГЛЫ



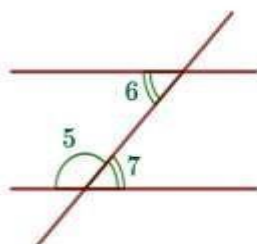
Сумма смежных углов равна 180° :

$$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ.$$



Вертикальные углы равны:

$$\angle 3 = \angle 4.$$



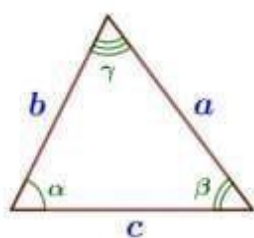
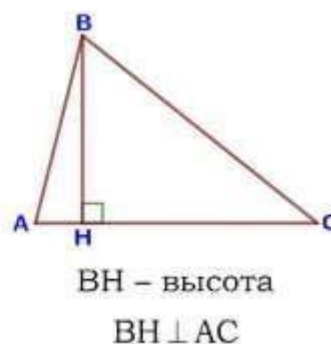
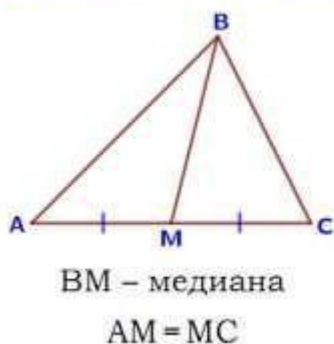
Если две параллельные прямые пересечены секущей, то:

а) сумма односторонних углов равна 180° :

$$\angle 5 + \angle 6 = 180^\circ;$$

б) накрест лежащие углы равны: $\angle 6 = \angle 7$.

Треугольник произвольный

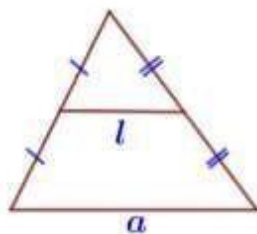


Сумма углов треугольника равна 180° :

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Периметр – сумма длин всех сторон:

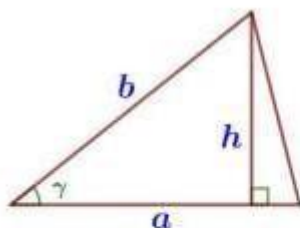
$$P = a + b + c.$$



Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны:

$$l \parallel a, \quad l = \frac{1}{2}a.$$

Три средние линии делят треугольник на четыре равных треугольника, подобных данному.



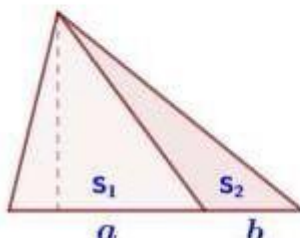
Площадь треугольника равна...

а) половине произведения его основания на высоту:

$$S = \frac{1}{2}ah_a.$$

б) половине произведения двух его сторон на синус угла между ними:

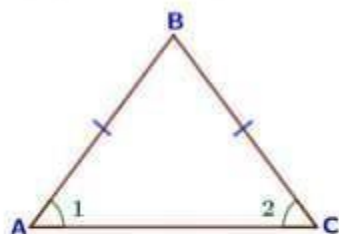
$$S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin \gamma.$$



Если высоты двух треугольников равны, то их площади относятся, как основания:

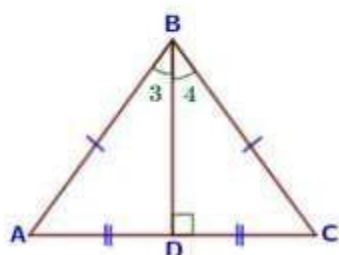
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{a}{b}.$$

Треугольник равнобедренный



В равнобедренном треугольнике углы при основании равны:

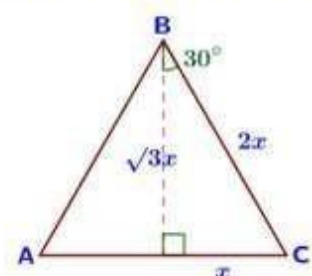
$$\angle 1 = \angle 2.$$



В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведенная к основанию, является медианой и высотой:

BD – биссектриса ($\angle 3 = \angle 4$),
BD – медиана ($AD = CD$),
BD – высота ($BD \perp AC$).

Треугольник равносторонний

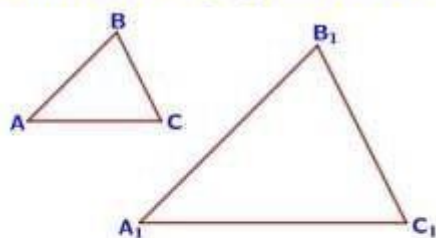


В равностороннем треугольнике все углы равны:

$$\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ.$$

Каждая медиана в равностороннем треугольнике совпадает с биссектрисой и высотой, проведенными из той же вершины.

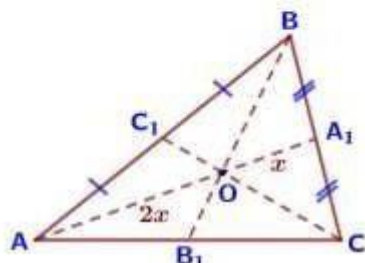
Подобные треугольники



Углы подобных треугольников соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого:

$$\angle A = \angle A_1, \quad \angle B = \angle B_1, \quad \angle C = \angle C_1,$$

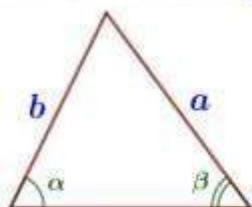
$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}.$$



Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины:

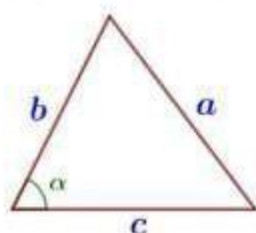
$$\frac{AO}{A_1O} = \frac{BO}{B_1O} = \frac{CO}{C_1O} = \frac{2}{1}.$$

Соотношение сторон треугольника



Теорема синусов: стороны треугольников пропорциональны синусам противолежащих углов:

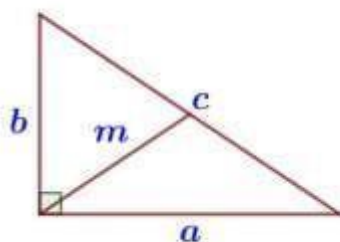
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}.$$



Теорема косинусов: квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha.$$

Треугольник прямоугольный

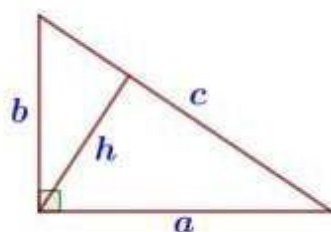


Теорема Пифагора: в прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Медиана, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы:

$$m = \frac{c}{2}.$$



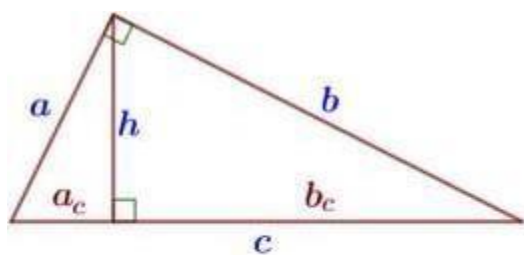
Площадь прямоугольного треугольника равна ...

а) половине произведения его катетов:

$$S = \frac{1}{2}ab.$$

б) половине произведения его гипотенузы на высоту, проведенную к ней:

$$S = \frac{1}{2}ch_c.$$

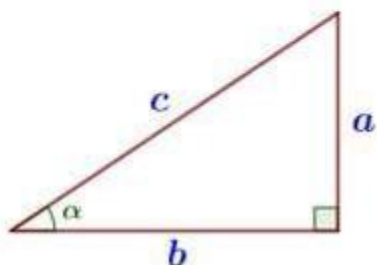


Пропорциональные отрезки:

$$h^2 = a_c \cdot b_c$$

$$a^2 = a_c \cdot c$$

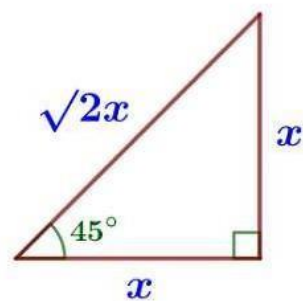
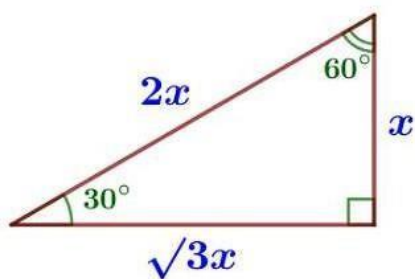
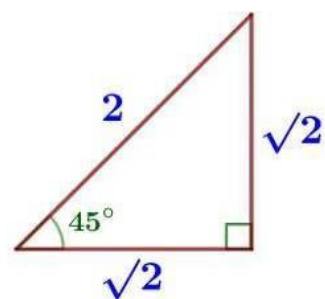
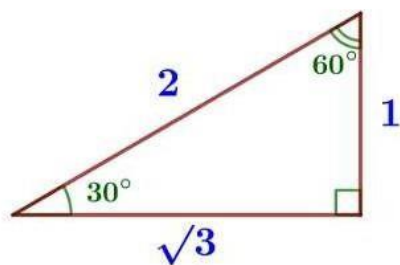
$$b^2 = b_c \cdot c$$



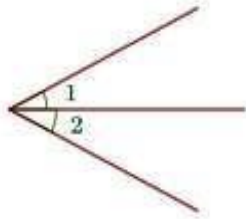
$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{противолежающий катет}}{\text{гипотенуза}}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{противолежающий катет}}{\text{прилежащий катет}}$$

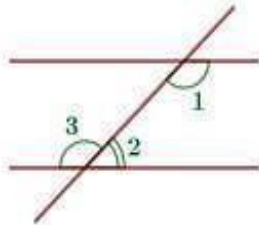


Дополнительная информация:



Биссектриса делит угол пополам.

$$\angle 1 = \angle 2$$

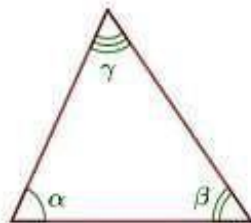


Если две параллельные прямые пересечены секущей, то:

а) сумма односторонних углов равна 180° :

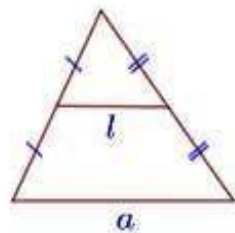
$$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ;$$

б) накрест лежащие углы равны: $\angle 1 = \angle 3$.



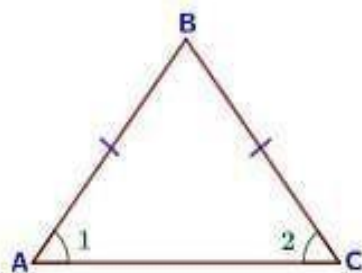
Сумма углов треугольника равна 180° :

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$



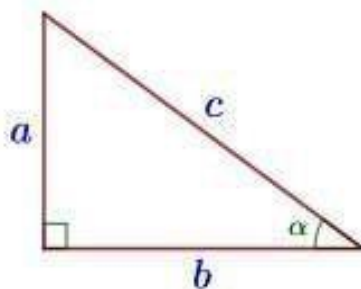
Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны:

$$l \parallel a, \quad l = \frac{1}{2}a.$$



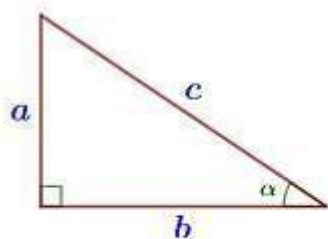
В равнобедренном треугольнике углы при основании равны:

$$AB = BC, \quad \angle 1 = \angle 2.$$



Теорема Пифагора: в прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

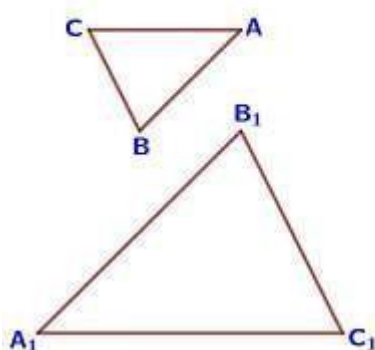
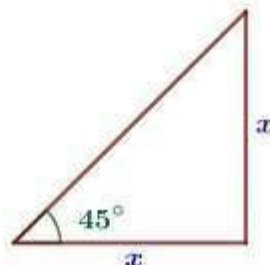
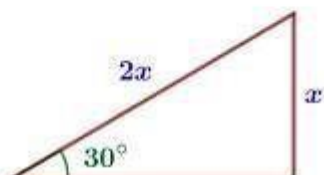


$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{противолежающий катет}}{\text{гипотенуза}}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{противолежающий катет}}{\text{прилежащий катет}}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$



Углы подобных треугольников соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого:

$$\angle A = \angle A_1 \quad \angle B = \angle B_1 \quad \angle C = \angle C_1,$$

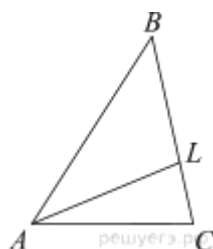
$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}.$$

Треугольники общего вида

1. У треугольника со сторонами 16 и 2 проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведённая к первой стороне, равна 1. Чему равна высота, проведённая ко второй стороне?

Ответ: 8

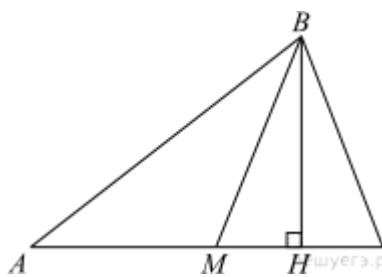
2.



В треугольнике ABC проведена биссектриса AL, угол ALC равен 112° , угол ABC равен 106° . Найдите угол ACB. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 62

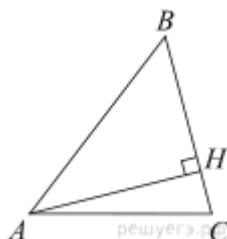
3.



В треугольнике ABC проведены медиана BM и высота BH . Известно, что $AC = 84$ и $BC = BM$. Найдите AH .

Ответ: 63

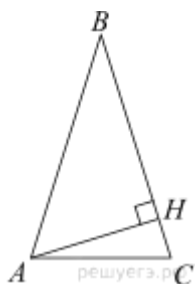
4.



В остроугольном треугольнике ABC высота AH равна $20\sqrt{3}$, а сторона AB равна 40. Найдите $\cos B$.

Ответ: 0,5

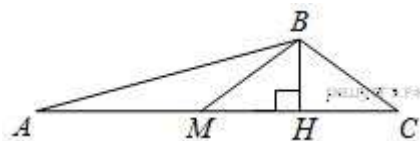
5.



В треугольнике ABC $AB = BC$, а высота AH делит сторону BC на отрезки $BH = 64$ и $CH = 16$. Найдите $\cos B$.

Ответ: 0,8

6.



В треугольнике ABC BM — медиана и BH — высота. Известно, что $AC = 216$, $HC = 54$ и $\angle ACB = 40^\circ$. Найдите угол AMB . Ответ дайте в градусах.

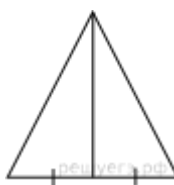
Ответ: 140

7.

Углы B и C треугольника ABC равны соответственно 65° и 85° . Найдите BC , если радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен 14.

Ответ: 14

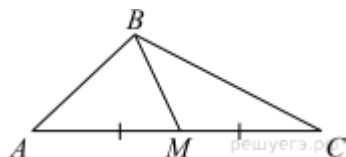
8.



Медиана равностороннего треугольника равна $9\sqrt{3}$. Найдите сторону этого треугольника.

Ответ: 18

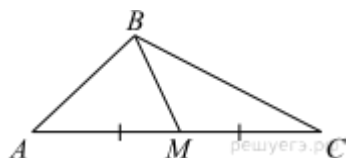
9.



В треугольнике ABC известно, что $AC = 54$, BM - медиана, $BM = 43$. Найдите AM .

Ответ: 27

10.



В треугольнике ABC известно, что $AC = 38$, BM - медиана, $BM = 17$. Найдите AM .

Ответ: 19

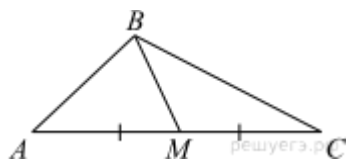
11. В треугольнике два угла равны 36° и 73° . Найдите его третий угол. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 71

12. В треугольнике два угла равны 43° и 88° . Найдите его третий угол. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 49

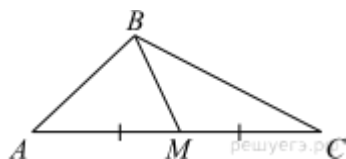
13.



В треугольнике ABC известно, что $AC = 32$, BM - медиана, $BM = 23$. Найдите AM .

Ответ: 16

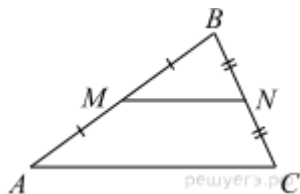
14.



В треугольнике ABC известно, что $AC = 58$, BM - медиана, $BM = 37$. Найдите AM .

Ответ: 29

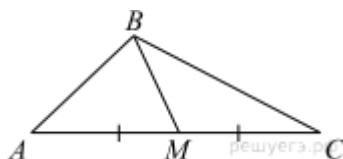
15.



Точки M и N являются серединами сторон AB и BC треугольника ABC , сторона AB равна 66, сторона BC равна 37, сторона AC равна 74. Найдите MN

Ответ: 37

16.



В треугольнике ABC известно, что $AC = 16$, BM - медиана, $BM = 12$. Найдите AM .

Ответ: 8

17. В треугольнике два угла равны 38° и 89° . Найдите его третий угол. Ответ дайте в градусах.

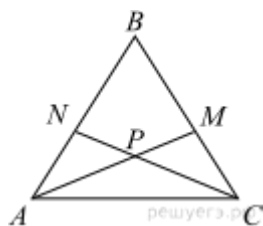
Ответ: 53

18. В треугольнике два угла равны 31° и 94° . Найдите его третий угол. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 55

Равнобедренные треугольники

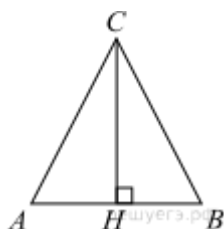
1. 3



В равностороннем треугольнике ABC биссектрисы CN и AM пересекаются в точке P . Найдите $\angle MPN$.

Ответ: 120

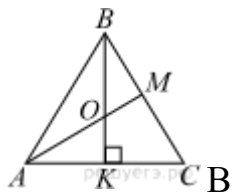
2.



В равнобедренном треугольнике ABC $AC = BC$. Найдите AC , если высота $CH = 12$, $AB = 10$.

Ответ: 13

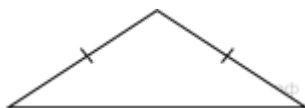
3.



равностороннем треугольнике ABC медианы BK и AM пересекаются в точке O . Найдите $\angle AOK$.

Ответ: 60

4.



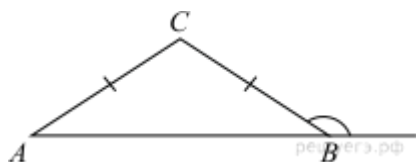
Площадь равнобедренного треугольника равна $196\sqrt{3}$. Угол, лежащий напротив основания равен 120° . Найдите длину боковой стороны.

Ответ: 28

5. Периметр равнобедренного треугольника равен 196, а основание — 96. Найдите площадь треугольника.

Ответ: 672

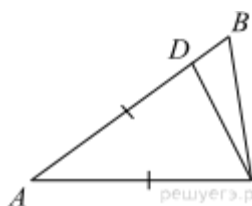
6.



В треугольнике ABC $AC = BC$. Внешний угол при вершине B равен 146° . Найдите угол C . Ответ дайте в градусах.

Ответ: 112

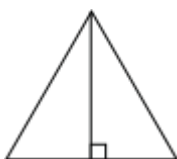
7.



Точка D на стороне AB треугольника ABC выбрана так, что $AD = AC$. Известно, что $\angle CAB = 80^\circ$ и $\angle ACB = 59^\circ$. Найдите угол DCB . Ответ дайте в градусах.

Ответ: 9

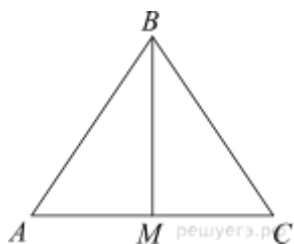
8.



Высота равностороннего треугольника равна $15\sqrt{3}$. Найдите его периметр.

Ответ: 90

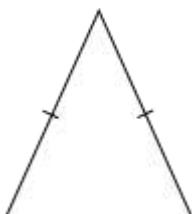
9.



В треугольнике ABC $AB = BC = 53$, $AC = 56$. Найдите длину медианы BM .

Ответ: 45

10.

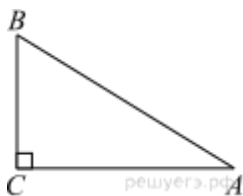


Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 10, а основание равно 12. Найдите площадь этого треугольника.

Ответ: 48

Прямоугольный треугольник

1.



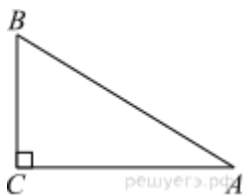
В треугольнике ABC угол C прямой, $BC = 8$, $\sin A = 0,4$. Найдите AB .

Ответ: 20

2. Два острых угла прямоугольного треугольника относятся как 4:5. Найдите больший острый угол. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 50

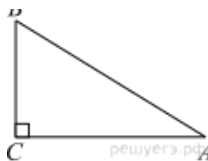
3.



В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AC = 15$, $\cos A = \frac{5}{7}$. Найдите AB .

Ответ: 21

4.

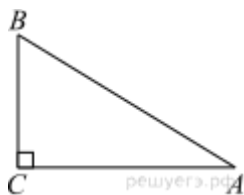


В треугольнике ABC угол C равен 90° , $BC = 12$, $\sin A = \frac{4}{11}$.

. Найдите AB .

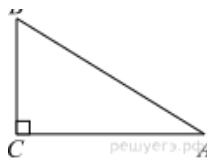
Ответ: 33

5.



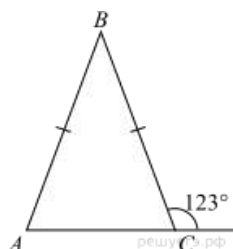
В треугольнике ABC угол C прямой, $BC = 8$, $\sin A = 0,4$. Найдите AB .
 Ответ: 20

6.



В треугольнике ABC угол C прямой, $AC = 9$, $\cos A = 0,3$.
 Найдите AB .
 Ответ: 30

7.



В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC внешний угол при вершине C равен 123° . Найдите величину угла ABC . Ответ дайте в градусах.
 Ответ: 66

8. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AC = 20$, $\operatorname{tg} A = 0,5$. Найдите BC .
 Ответ: 10

9. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $BC = 20$, $\operatorname{tg} A = 0,5$. Найдите AC .
 Ответ: 40

10. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $BC = 12$, $\operatorname{tg} A = 1,5$. Найдите AC .
 Ответ: 8

Используемый ресурс:

1. Яценко И. В., Шестаков С. А. ОГЭ по математике от А до Я. Модульный курс. Алгебра.—М.: МЦНМО, 2019.—224 с.

2. Е. А. Ширяева (www.time4math.ru) Задачник (ОГЭ 2021)

3. СДАМ ГИА: РЕШУ ОГЭ Образовательный портал для подготовки к экзаменам Математика

Занятие 21

Четырёхугольники и их элементы. Задачи ОГЭ №15

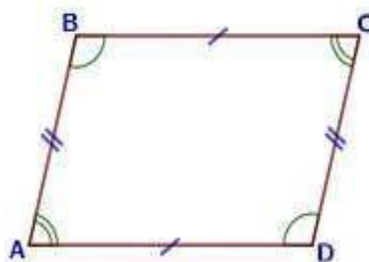
Задание 15 ОГЭ по математике представляет собой задачу по теме «Четырёхугольники». Напомним свойства и теоремы, связанные с четырёхугольниками, изучаемыми в основной школе. Сначала приведём основные факты, связанные с параллелограммом:

- противоположные стороны параллелограмма параллельны и равны;
- сумма углов параллелограмма равна 360° ;
- сумма двух углов параллелограмма, прилежащих к одной из его сторон, равна 180° ;
- диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

Важнейшими частными случаями параллелограмма являются прямоугольник, ромб, квадрат. Они обладают всеми свойствами параллелограмма, но для них справедливы и некоторые дополнительные свойства, которыми произвольные параллелограммы не обладают:

- диагонали прямоугольника (а значит, и квадрата) равны;
- диагонали ромба (а значит, и квадрата) взаимно перпендикулярны;
- диагонали ромба (а значит, и квадрата) являются биссектрисами его углов.

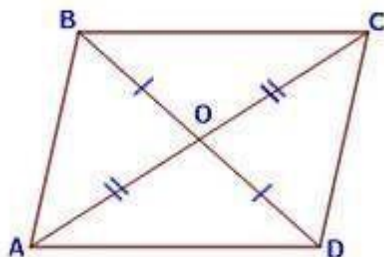
Параллелограмм



В параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны.

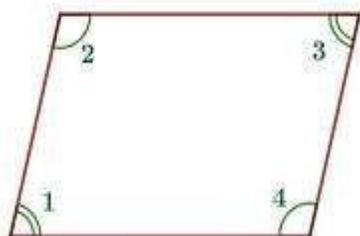
$$AB=CD, \quad BC=AD$$

$$\angle A=\angle C, \quad \angle B=\angle D$$



Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

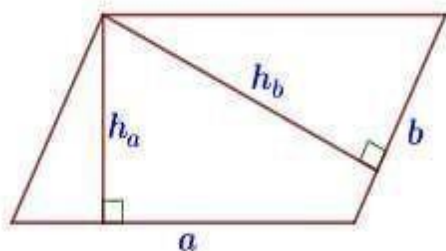
$$AO=OC, \quad BO=OD$$



Сумма углов, прилежающих к одной стороне параллелограмма, равна 180° .

Примеры:

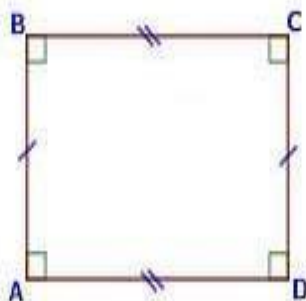
$$\angle 1+\angle 2=180^\circ, \quad \angle 2+\angle 3=180^\circ$$



Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту.

$$S=ah_a=bh_b$$

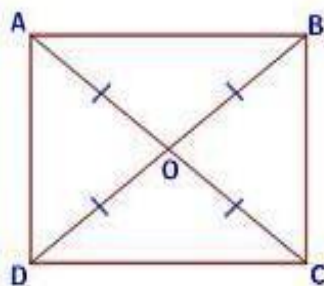
Прямоугольник и квадрат



Все углы прямоугольника – прямые, а противоположные стороны – равны.

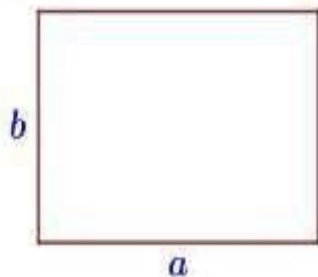
$$\angle A=\angle C=\angle B=\angle D=90^\circ$$

$$AB=CD, \quad BC=AD$$



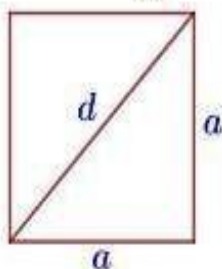
Диагонали прямоугольника равны и точкой пересечения делятся пополам.

$$AO = BO = CO = DO$$



Площадь прямоугольника равна произведению длин его смежных сторон.

$$S = ab$$



Площадь квадрата равна квадрату его стороны.

$$S = a^2.$$

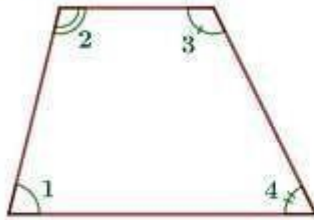
Периметр квадрата: $P = 4a$.

По теореме Пифагора: $d^2 = 2a^2$.

Трапеция является более сложным четырёхугольником по сравнению с параллелограммом, поскольку у неё параллельны только две стороны (основания трапеции), а две другие не параллельны (боковые стороны трапеции).

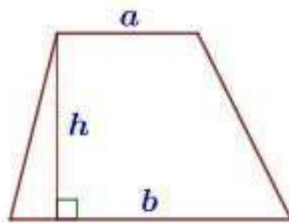
Трапеция, у которой одна из боковых сторон перпендикулярна основаниям, называется прямоугольной; трапеция, боковые стороны которой равны, называется равнобедренной (диагонали такой трапеции равны, углы при любом из оснований также равны). Средняя линия трапеции параллельна её основаниям и равна их полусумме.

Трапеция



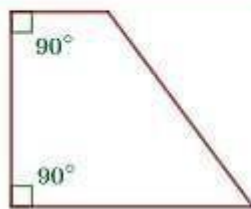
Сумма углов, прилежащих к боковой стороне трапеции, равна 180° .

$$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ, \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$$

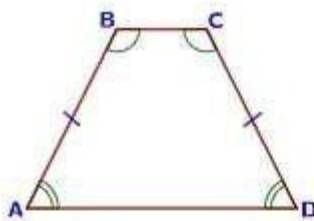


Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту.

$$S = \frac{1}{2}(a+b)h$$



У прямоугольной трапеции один из углов прямой.

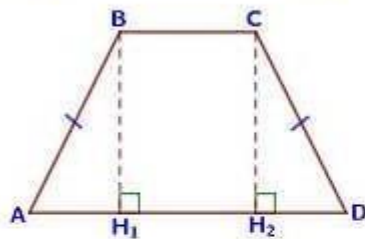


Трапеция называется равнобедренной, если её боковые стороны равны.

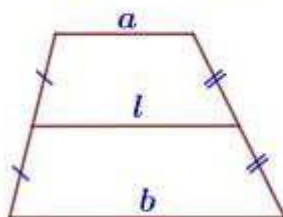
$$AB = CD$$

В равнобедренной трапеции углы при каждом основании равны.

$$\angle A = \angle D, \angle B = \angle C$$

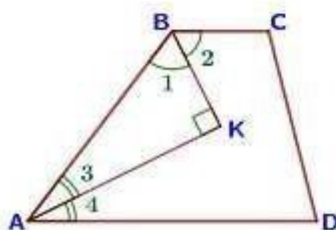


$$AH_1 = H_2D = \frac{AD - BC}{2}$$



Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме:

$$l \parallel a, l \parallel b, l = \frac{a+b}{2}$$

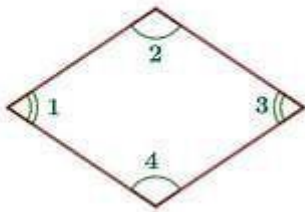


BK – биссектриса ($\angle 1 = \angle 2$),

AK – биссектриса ($\angle 3 = \angle 4$)

$$\angle AKB = 90^\circ$$

Ромб



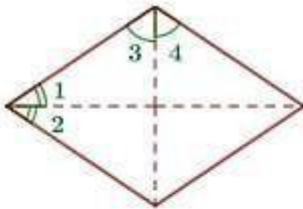
В ромбе все стороны равны и противоположные углы равны.

$$\angle 1 = \angle 3, \quad \angle 2 = \angle 4$$

Сумма углов, прилежащих к одной стороне ромба, равна 180° .

Примеры:

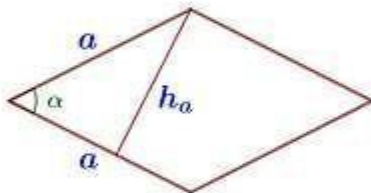
$$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ, \quad \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$$



Диагонали ромба делят его углы пополам.

$$\angle 1 = \angle 2, \quad \angle 3 = \angle 4$$

Периметр ромба: $P = 4a$.



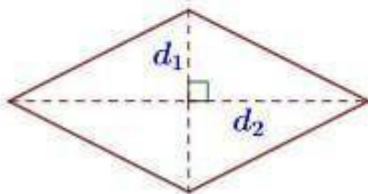
Площадь ромба равна...

а) произведению его стороны на высоту:

$$S = ah_a,$$

б) произведению двух его сторон на синус угла между ними:

$$S = a^2 \sin \alpha.$$



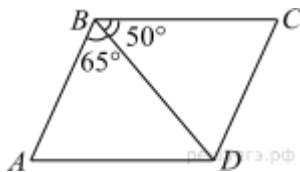
Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2$$

Диагонали ромба взаимно перпендикулярны: $d_1 \perp d_2$.

Параллелограмм

1.



Диагональ BD параллелограмма $ABCD$ образует с его сторонами углы, равные 65° и 50° . Найдите меньший угол параллелограмма.
Ответ: 65

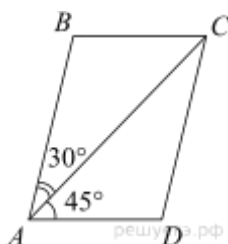
2. Разность углов, прилежащих к одной стороне параллелограмма, равна 40° . Найдите меньший угол параллелограмма. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 70

3. Один угол параллелограмма в два раза больше другого. Найдите меньший угол. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 60

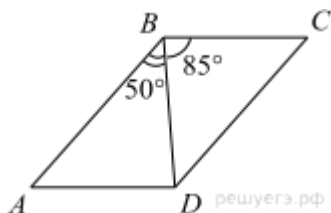
4.



Диагональ AC параллелограмма $ABCD$ образует с его сторонами углы, равные 30° и 45° . Найдите больший угол параллелограмма.

Ответ: 105

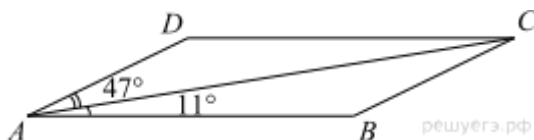
5.



Диагональ BD параллелограмма $ABCD$ образует с его сторонами углы, равные 50° и 85° . Найдите меньший угол параллелограмма.

Ответ: 45

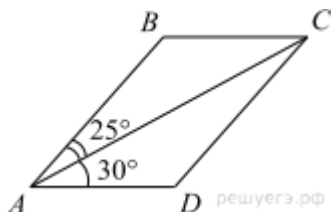
6.



В параллелограмме $ABCD$ проведена диагональ AC . Угол DAC равен 47° , а угол CAB равен 11° . Найдите больший угол параллелограмма $ABCD$. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 122

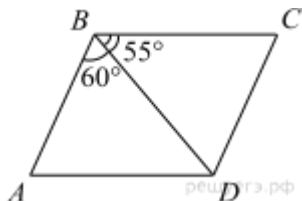
7.



Диагональ AC параллелограмма $ABCD$ образует с его сторонами углы, равные 25° и 30° . Найдите больший угол параллелограмма.

Ответ: 125

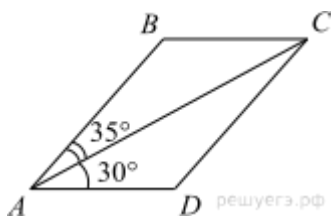
8.



Диагональ BD параллелограмма $ABCD$ образует с его сторонами углы, равные 60° и 55° . Найдите меньший угол параллелограмма.

Ответ: 65

9.



Диагональ AC параллелограмма $ABCD$ образует с его сторонами углы, равные 35° и 30° . Найдите больший угол параллелограмма.

Ответ: 115

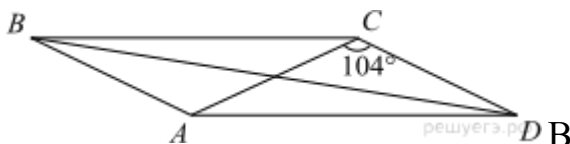
10. На продолжении стороны AD параллелограмма $ABCD$ за точкой D отмечена точка E так, что $DC = DE$. Найдите больший угол параллелограмма $ABCD$, если $\angle DEC = 53^\circ$. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 106

11. В параллелограмм вписана окружность. Найдите периметр параллелограмма, если одна из его сторон равна 6.

Ответ: 24

12.

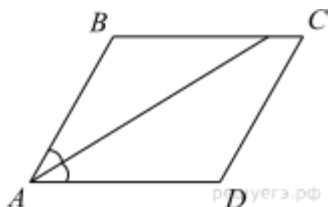


параллелограмме $ABCD$ диагональ AC в 2 раза больше стороны AB и $\angle ACD = 104^\circ$. Найдите меньший угол между диагоналями параллелограмма.

Ответ дайте в градусах.

Ответ: 38

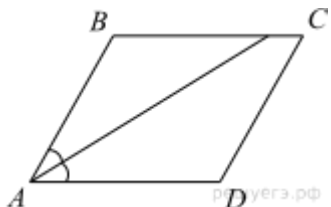
13.



Найдите величину острого угла параллелограмма $ABCD$, если биссектриса угла A образует со стороной BC угол, равный 15° . Ответ дайте в градусах.

Ответ: 30

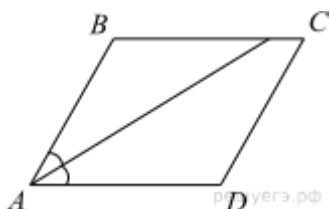
14.



>Найдите острый угол параллелограмма $ABCD$, если биссектриса угла A образует со стороной BC угол, равный 33° . Ответ дайте в градусах.

Ответ: 66

15.



Найдите величину острого угла параллелограмма $ABCD$, если биссектриса угла A образует со стороной BC угол, равный 31° . Ответ дайте в градусах.
 Ответ: 62

Ромб

1.

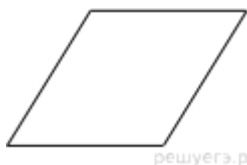


Сторона ромба равна 34, а острый угол равен 60° . Высота ромба, опущенная из вершины тупого угла, делит сторону на два отрезка. Каковы длины этих отрезков?

Перечислите эти длины в ответе без пробелов в порядке возрастания.

Ответ: 1717

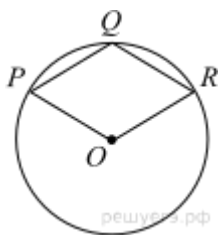
2.



Площадь ромба равна 27, а периметр равен 36. Найдите высоту ромба.

Ответ: 3

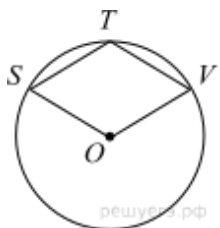
3.



Точка O — центр окружности, на которой лежат точки P , Q и R таким образом, что $OPQR$ — ромб. Найдите угол ORQ . Ответ дайте в градусах.

Ответ: 60

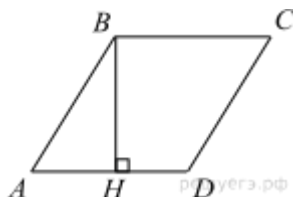
4.



Точка O — центр окружности, на которой лежат точки S , T и V таким образом, что $OSTV$ — ромб. Найдите угол STV . Ответ дайте в градусах.

Ответ: 120

5.

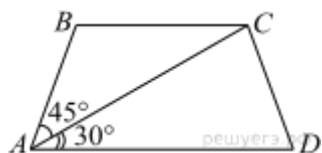


Высота BH ромба $ABCD$ делит его сторону AD на отрезки $AH = 44$ и $HD = 11$. Найдите площадь ромба.

Ответ: 1815

Трапеция

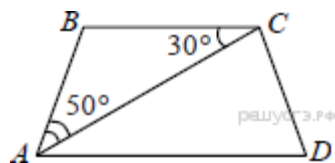
1.



Найдите больший угол равнобедренной трапеции $ABCD$, если диагональ AC образует с основанием AD и боковой стороной AB углы, равные 30° и 45° соответственно.

Ответ: 105

2.



Найдите угол ADC равнобедренной трапеции $ABCD$, если диагональ AC образует с основанием BC и боковой стороной AB углы, равные 30° и 50° соответственно.

Ответ: 80

3. Сумма двух углов равнобедренной трапеции равна 140° . Найдите больший угол трапеции. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 110

4. Сумма двух углов равнобедренной трапеции равна 220° . Найдите меньший угол трапеции. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 70

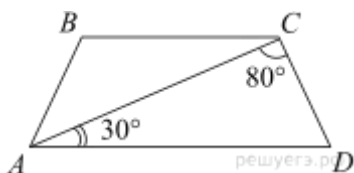
5. Найдите меньший угол равнобедренной трапеции, если два ее угла относятся как 1:2. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 60

6. Основания трапеции равны 4 см и 10 см. Диагональ трапеции делит среднюю линию на два отрезка. Найдите длину большего из них.

Ответ: 5

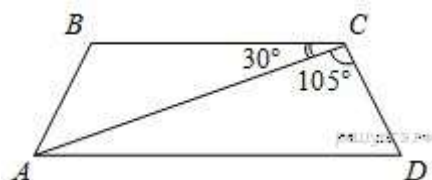
7.



Найдите угол ABC равнобедренной трапеции $ABCD$, если диагональ AC образует с основанием AD и боковой стороной CD углы, равные 30° и 80° соответственно.

Ответ: 110

8.



Найдите меньший угол равнобедренной трапеции $ABCD$, если диагональ AC образует с основанием BC и боковой стороной CD углы, равные 30° и 105° соответственно.

Ответ: 45

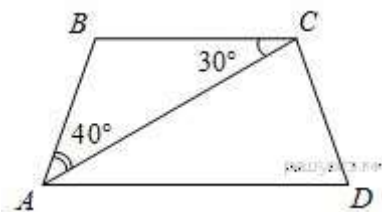
9.



Тангенс острого угла прямоугольной трапеции равен $\frac{5}{6}$. Найдите её большее основание, если меньшее основание равно высоте и равно 15.

Ответ: 33

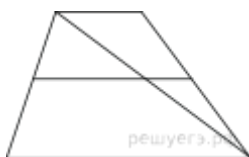
10.



Найдите угол ADC равнобедренной трапеции $ABCD$, если диагональ AC образует с основанием BC и боковой стороной AB углы, равные 30° и 40° соответственно.

Ответ: 70

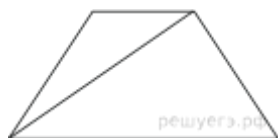
11.



Основания трапеции равны 4 и 10. Найдите больший из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из её диагоналей.

Ответ: 5

12.



Основания равнобедренной трапеции равны 50 и 104, боковая сторона 45. Найдите длину диагонали трапеции.

Ответ: 85

13. Около трапеции, один из углов которой равен 49° , описана окружность. Найдите остальные углы трапеции.

Запишите величины углов в ответ без пробелов в порядке неубывания.

Ответ: 49131131

14. В трапецию, сумма длин боковых сторон которой равна 24, вписана окружность. Найдите длину средней линии трапеции.

Ответ: 12

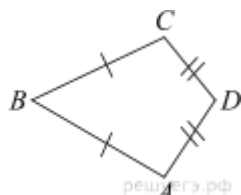
15. Биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB трапеции $ABCD$ пересекаются в точке F . Найдите AB , если $AF = 24$, $BF = 32$.

Многоугольники

1. Сумма трех углов выпуклого четырехугольника равна 300° . Найдите четвертый угол. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 60

2.



В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AB = BC$, $AD = CD$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle D = 110^\circ$. Найдите угол A . Ответ дайте в градусах.

Ответ: 95

3. Углы выпуклого четырехугольника относятся как 1:2:3:4. Найдите меньший угол. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 36

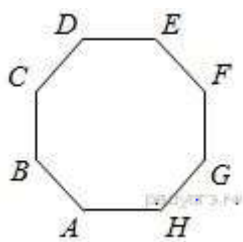
4. Два угла вписанного в окружность четырехугольника равны 82° и 58° . Найдите больший из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 122

5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 136° , угол CAD равен 82° . Найдите угол ABD . Ответ дайте в градусах.

Ответ: 54

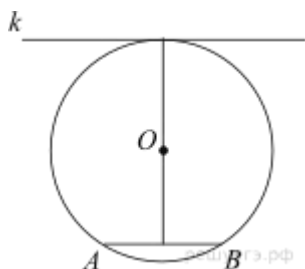
6.



$ABCDEFGH$ — правильный восьмиугольник. Найдите угол EFG . Ответ дайте в градусах.

Ответ: 135

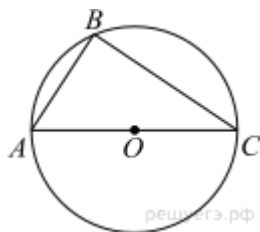
7.



Радиус окружности с центром в точке O равен 85, длина хорды AB равна 80 (см. рисунок). Найдите расстояние от хорды AB до параллельной ей касательной k .

Ответ: 160

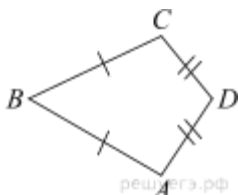
8.



Сторона AC треугольника ABC проходит через центр описанной около него окружности. Найдите $\angle C$, если $\angle A = 75^\circ$. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 15

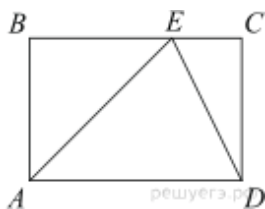
9.



В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AB = BC$, $AD = CD$, $\angle B = 77^\circ$, $\angle D = 141^\circ$. Найдите угол A . Ответ дайте в градусах.

Ответ: 71

10.



На стороне BC прямоугольника $ABCD$, у которого $AB = 12$ и $AD = 17$, отмечена точка E так, что $\angle EAB = 45^\circ$. Найдите ED .

Ответ: 13

Используемый ресурс:

1. Яценко И. В., Шестаков С. А. ОГЭ по математике от А до Я. Модульный курс. Алгебра.—М.: МЦНМО, 2019.—224 с.
2. Е. А. Ширяева (www.time4math.ru) Задачник (ОГЭ 2021)
3. СДАМ ГИА: РЕШУ ОГЭ Образовательный портал для подготовки к экзаменам Математика

Занятие 23

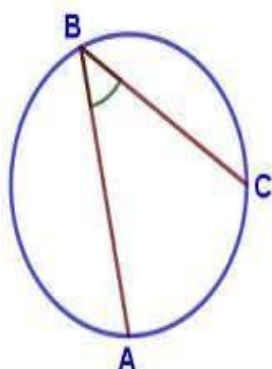
Окружность, круг и их элементы. Вписанные и центральные углы Задачи ОГЭ №16

Задание 16 ОГЭ по математике представляет собой задачу, связанную с окружностями и их элементами. Приведём основные факты по теме «Окружность и круг»:

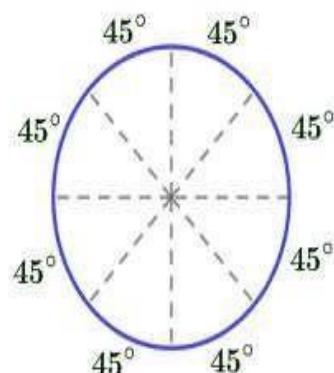
- центральный угол окружности измеряется дугой этой окружности, на которую он опирается;
- вписанный угол окружности равен половине центрального угла и измеряется половиной дуги, на которую он опирается;
- вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности, равен 90° ;
- касательная к окружности перпендикулярна радиусу этой окружности, проведённому в точку касания;
- отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, равны;
- центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла;
- угол между двумя секущими к окружности, пересекающимися внутри окружности, равен полусумме дуг, высекаемых на окружности вертикальными углами, образованными этими секущими;
- угол между двумя секущими к окружности, пересекающимися вне окружности, равен полуразности дуг, высекаемых на окружности углом, образованным этими секущими;
- две окружности не имеют общих точек в том и только том случае, если расстояние между их центрами больше суммы радиусов этих окружностей или меньше разности большего и меньшего радиусов;
- две окружности имеют ровно две общие точки (пересекаются в двух точках) в том и только том случае, если расстояние между их центрами меньше суммы радиусов этих окружностей, но больше разности большего и меньшего радиусов;

- две окружности имеют ровно одну общую точку (касаются) в том и только том случае, если расстояние между их центрами равно сумме радиусов этих окружностей (внешнее касание) либо равно разности большего и меньшего радиусов этих окружностей (внутреннее касание);
- длина окружности равна $2\pi r$, где r —радиус окружности;
- площадь круга равна πr^2 , где r —радиус круга.

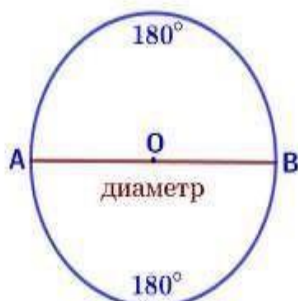
Углы



Градусная мера
вписанного угла измеряется
половиной дуги, на которую он
опирается: $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$.



Окружность

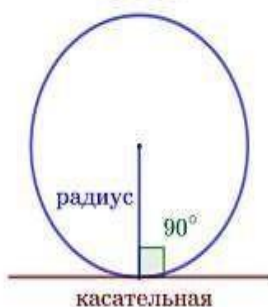


AO, BO – радиусы $AO = BO$
AB – диаметр $D = 2R$

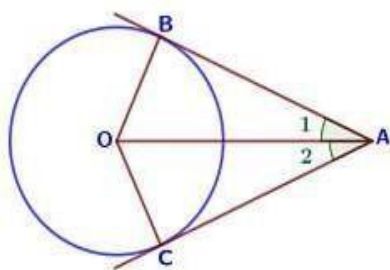
Сумма градусных мер двух дуг окружности с общими концами равна 360° .

Диаметр делит окружность на две полуокружности.

$$\cup AB = 180^\circ$$

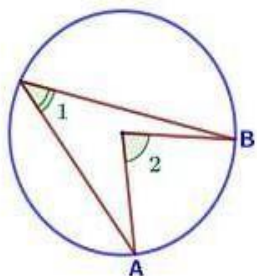


Касательная к окружности **перпендикулярна** к радиусу, проведенному в точку касания.



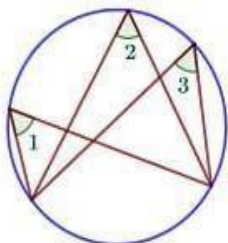
Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, **равны** и составляют **равные углы** с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности:

$$AB = AC, \quad \angle 1 = \angle 2.$$



Градусная мера **вписанного угла** (вершина лежит на окружности) измеряется **половиной** дуги, на которую он опирается: $\angle 1 = \frac{1}{2} \cup AB$.

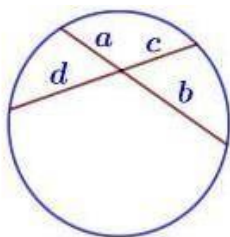
Градусная мера **центрального угла** (вершина в центре окружности) равна градусной мере соответствующей дуги окружности: $\angle 2 = \cup AB$.



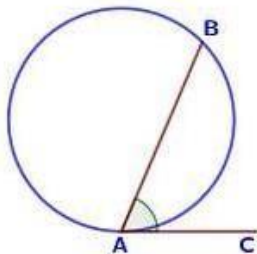
Вписанные **углы**, опирающиеся на одну и ту же дугу, **равны**: $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$.



Вписанный угол, опирающийся на полуокружность – **прямой** (90°).

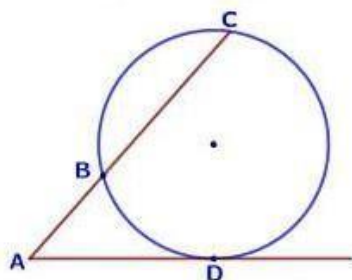


Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды: $ab = cd$.



Угол, образованный касательной и хордой измеряется половиной дуги, заключенной между его сторонами:

$$\angle BAC = \frac{1}{2} \cdot \overset{\frown}{AB}.$$



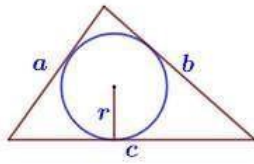
Квадрат отрезка касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть:

$$AD^2 = AB \cdot AC.$$

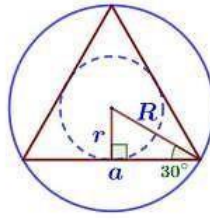
Укажем теперь основные факты, связанные с окружностью, описанной около четырёхугольника:

- около четырёхугольника можно описать окружность (и притом только одну) в том и только том случае, если суммы его противоположных углов равны (т. е. каждая из этих сумм равна 180°);
- центром описанной окружности четырёхугольника является точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам;
- около параллелограмма можно описать окружность, только если он является прямоугольником;
- около любого прямоугольника (а значит, и квадрата) можно описать окружность; центром этой окружности является точка пересечения диагоналей прямоугольника, а её радиус равен половине диагонали прямоугольника;
- около трапеции можно описать окружность в том и только том случае, если она равнобедренная.

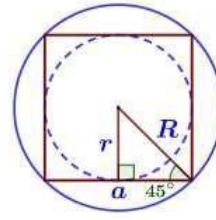
Вписанная и описанная окружность



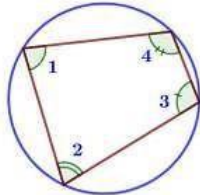
$$p = \frac{a+b+c}{2} \quad S = pr$$



$$R = 2r$$

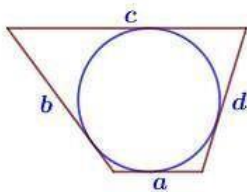


$$a = 2r$$



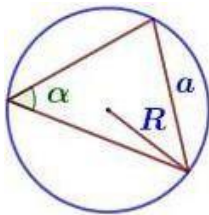
В любом вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равна 180° :

$$\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4 = 180^\circ$$



В любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны:

$$a + c = b + d.$$

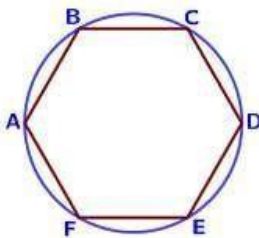


Удвоенный радиус описанной окружности равен отношению стороны треугольника к синусу противолежащего угла:

$$2R = \frac{a}{\sin \alpha}.$$

Правильные многоугольники

Любой правильный многоугольник можно вписать в окружность.



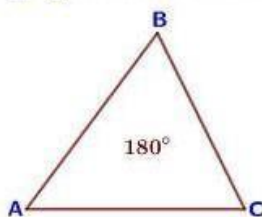
У правильного многоугольника все стороны равны.

$$AB = BC = CD = DE = EF = FA$$

Равные дуги стягиваются равными хордами.

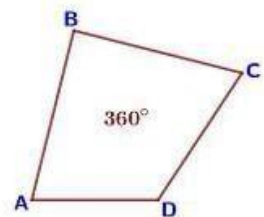
$$\cup AB = \cup BC = \cup CD = \cup DE = \cup EF = \cup FA$$

Треугольник и четырехугольник



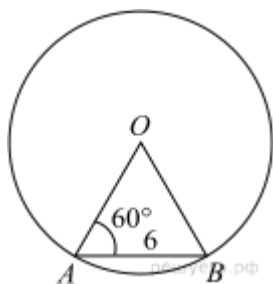
Сумма углов треугольника равна 180° .

Сумма углов выпуклого четырехугольника равна 360° .



Центральные и вписанные углы

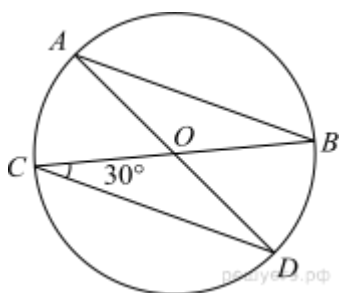
1.



Центральный угол AOB опирается на хорду AB длиной 6. При этом угол OAB равен 60° . Найдите радиус окружности.

Ответ: 6

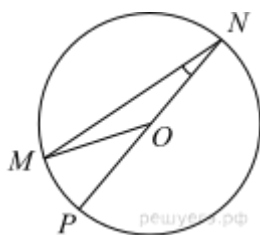
2.



В окружности с центром в точке O проведены диаметры AD и BC , угол OCD равен 30° . Найдите величину угла OAB .

Ответ: 30

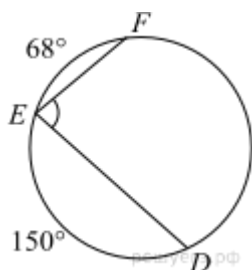
3.



Найдите градусную меру центрального $\angle MON$, если известно, NP — диаметр, а градусная мера $\angle MNP$ равна 18° .

Ответ: 144

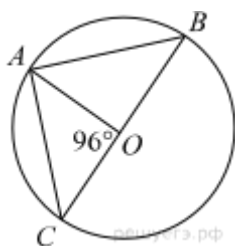
4.



Найдите $\angle DEF$, если градусные меры дуг DE и EF равны 150° и 68° соответственно.

Ответ: 71

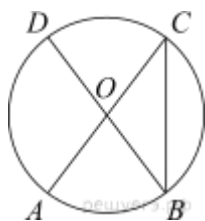
5.



Найдите градусную меру $\angle ACB$, если известно, что BC является диаметром окружности, а градусная мера центрального $\angle AOC$ равна 96° .

Ответ: 42

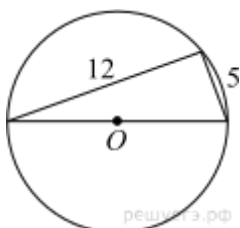
6.



В окружности с центром O AC и BD — диаметры. Угол ACB равен 26° . Найдите угол AOD . Ответ дайте в градусах.

Ответ: 128

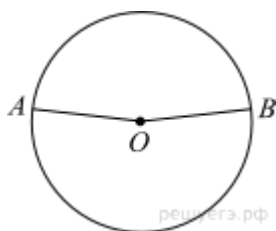
7.



Прямоугольный треугольник с катетами 5 см и 12 см вписан в окружность. Чему равен радиус этой окружности?

Ответ: 6,5

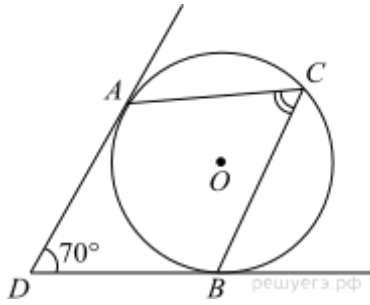
8.



Точки A и B делят окружность на две дуги, длины которых относятся как 9:11. Найдите величину центрального угла, опирающегося на меньшую из дуг. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 162

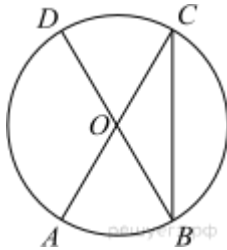
9.



В угол величиной 70° вписана окружность, которая касается его сторон в точках A и B . На одной из дуг этой окружности выбрали точку C так, как показано на рисунке. Найдите величину угла ACB .

Ответ: 55

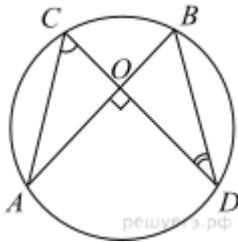
10.



Величина центрального угла AOD равна 110° . Найдите величину вписанного угла ACB . Ответ дайте в градусах.

Ответ: 35

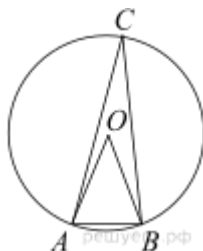
11.



Точки A , B , C и D лежат на одной окружности так, что хорды AB и CD взаимно перпендикулярны, а $\angle BDC = 25^\circ$. Найдите величину угла ACD .

Ответ: 65

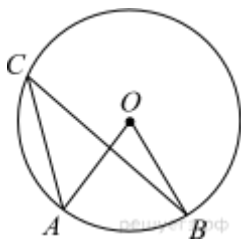
12.



Треугольник ABC вписан в окружность с центром в точке O . Найдите градусную меру угла C треугольника ABC , если угол AOB равен 48° .

Ответ: 24

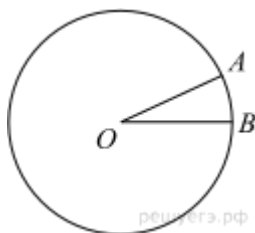
13.



Точка O — центр окружности, $\angle AOB = 84^\circ$ (см. рисунок). Найдите величину угла ACB (в градусах).

Ответ: 42

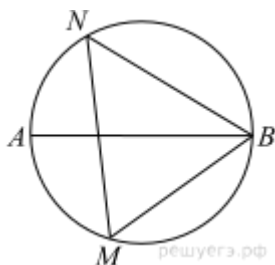
14.



На окружности с центром O отмечены точки A и B так, что $\angle AOB = 28^\circ$. Длина меньшей дуги AB равна 63. Найдите длину большей дуги.

Ответ: 747

15.

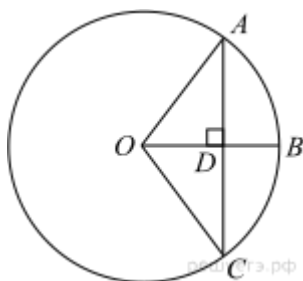


На окружности по разные стороны от диаметра AB взяты точки M и N . Известно, что $\angle NBA = 38^\circ$. Найдите угол NMB . Ответ дайте в градусах.

Ответ: 52

Касательная, хорда, секущая, радиус

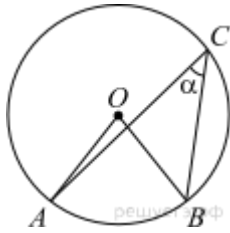
1.



Радиус OB окружности с центром в точке O пересекает хорду AC в точке D и перпендикулярен ей. Найдите длину хорды AC , если $BD = 1$ см, а радиус окружности равен 5 см.

Ответ: 6

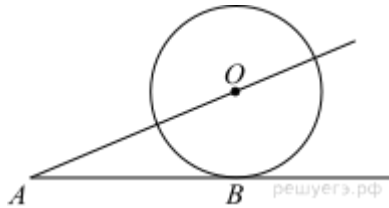
2.



Найдите величину (в градусах) вписанного угла α , опирающегося на хорду AB , равную радиусу окружности.

Ответ: 30

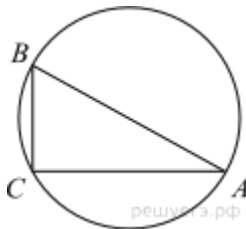
3.



К окружности с центром в точке O проведены касательная AB и секущая AO . Найдите радиус окружности, если $AB = 12$ см, $AO = 13$ см.

Ответ: 5

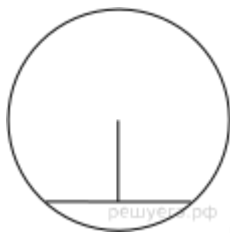
4.



В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AC = 30$, $BC = 5\sqrt{13}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

Ответ: 17,5

5.



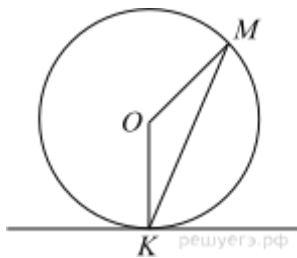
Длина хорды окружности равна 72, а расстояние от центра окружности до этой хорды равно 27. Найдите диаметр окружности.

Ответ: 90

6. Вершины треугольника делят описанную около него окружность на три дуги, длины которых относятся как 3:4:11. Найдите радиус окружности, если меньшая из сторон равна 14.

Ответ: 14

7.



Прямая касается окружности в точке K . Точка O — центр окружности. Хорда KM образует с касательной угол, равный 83° . Найдите величину угла OMK . Ответ дайте в градусах.

Ответ: 7

8. Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите длину хорды CD , если $AB = 20$, а расстояния от центра окружности до хорд AB и CD равны соответственно 24 и 10.

Ответ: 48

9. Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите расстояние от центра окружности до хорды CD , если $AB = 18$, $CD = 24$, а расстояние от центра окружности до хорды AB равно 12.

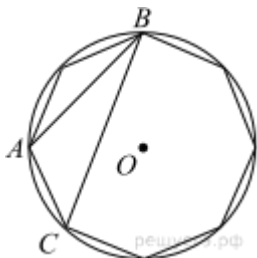
Ответ: 9

10. На окружности с центром O отмечены точки A и B так, что $\angle AOB = 66^\circ$. Длина меньшей дуги AB равна 99. Найдите длину большей дуги.

Ответ: 441

Окружность, описанная вокруг многоугольника

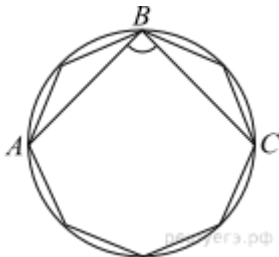
1.



В окружность вписан равносторонний восьмиугольник. Найдите величину угла ABC .

Ответ: 22,5

2.



В окружность вписан равносторонний восьмиугольник. Найдите величину угла ABC .

Ответ: 90

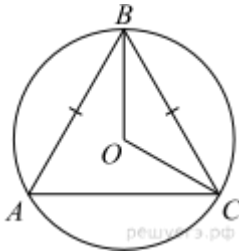
3. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 4. Угол при вершине, противолежащий основанию, равен 120° . Найдите диаметр окружности, описанной около этого треугольника.

Ответ: 8

4. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 5. Угол при вершине, противолежащий основанию, равен 120° . Найдите диаметр окружности, описанной около этого треугольника.

Ответ: 10

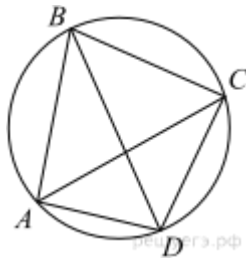
5.



Окружность с центром в точке O описана около равнобедренного треугольника ABC , в котором $AB = BC$ и $\angle ABC = 177^\circ$. Найдите величину угла BOC . Ответ дайте в градусах.

Ответ: 3

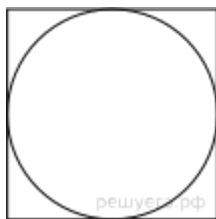
6.



Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 70° , угол CAD равен 49° . Найдите угол ABD . Ответ дайте в градусах.

Ответ: 21

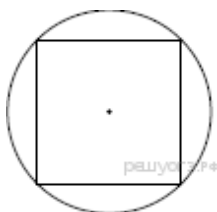
7.



Найдите площадь квадрата, описанного вокруг окружности радиуса 7.

Ответ: 196

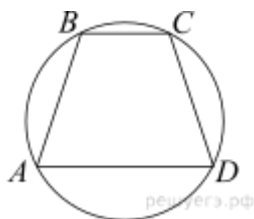
8.



Радиус окружности, описанной около квадрата, равен $16\sqrt{2}$. Найдите длину стороны этого квадрата.

Ответ: 32

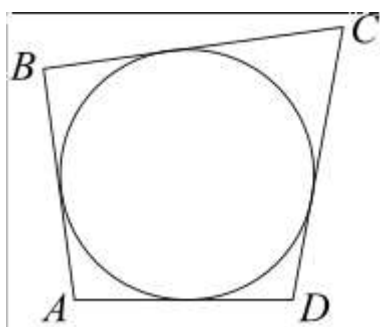
9.



Угол A трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC , вписанной в окружность, равен 61° . Найдите угол C этой трапеции. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 119

10.



Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности, $AB = 12$, $BC = 6$, $CD = 13$. Найдите AD .

Ответ: 19

Используемый ресурс:

1. Яценко И. В., Шестаков С. А. ОГЭ по математике от А до Я. Модульный курс. Алгебра.—М.: МЦНМО, 2019.—224 с.

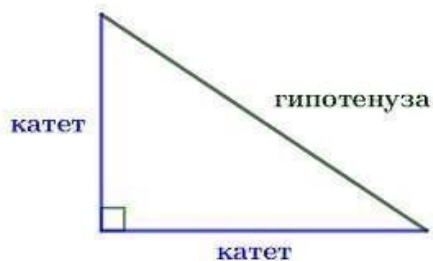
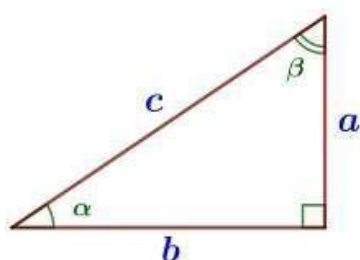
2. Е. А. Ширяева (www.time4math.ru) Задачник (ОГЭ 2021)

3. СДАМ ГИА: РЕШУ ОГЭ Образовательный портал для подготовки к экзаменам Математика

Занятие 24

Площади фигур. Задачи ОГЭ №17

Треугольник прямоугольный



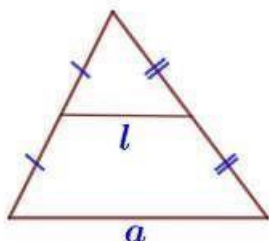
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}$$

Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов:

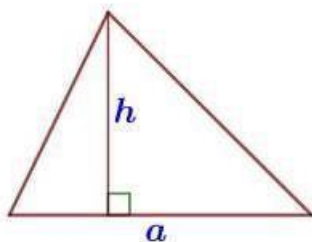
$$S = \frac{1}{2}ab.$$

Треугольник произвольный



Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны:

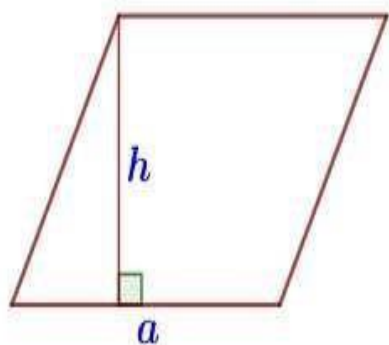
$$l \parallel a, \quad l = \frac{1}{2}a.$$



Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту:

$$S = \frac{1}{2}ah_a.$$

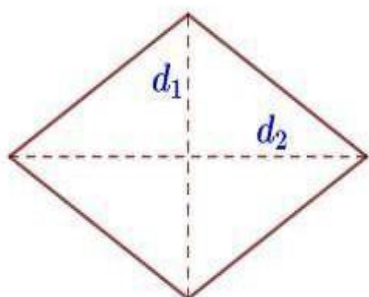
Параллелограмм



Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту:

$$S = ah_a.$$

Ромб

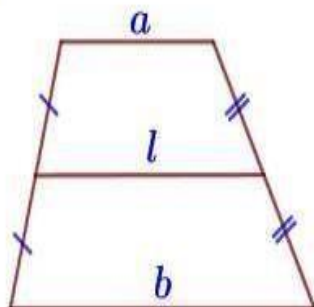


d_1 и d_2 – диагонали

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей:

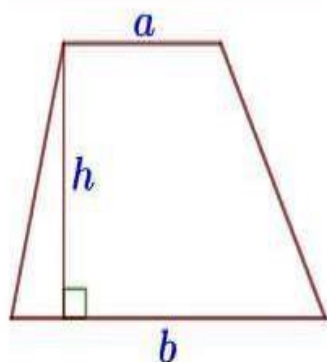
$$S = \frac{1}{2}d_1d_2.$$

Трапеция



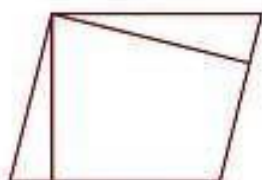
Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме:

$$l \parallel a, \quad l \parallel b, \quad l = \frac{a+b}{2}.$$



Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту:

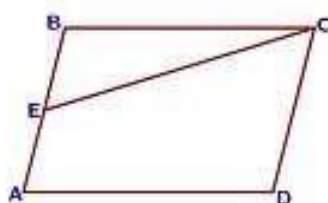
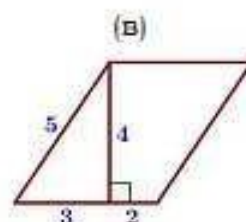
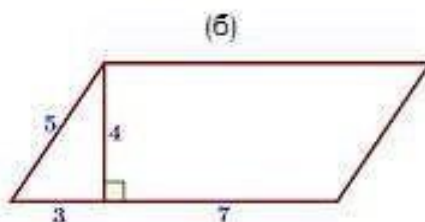
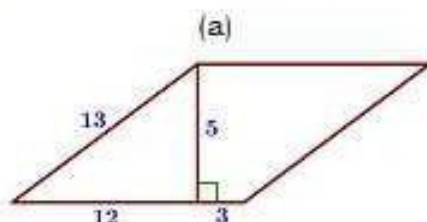
$$S = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h.$$



23. Площадь параллелограмма равна 60, а две его стороны равны 4 и 20. Найдите его высоты. В ответе укажите большую высоту.

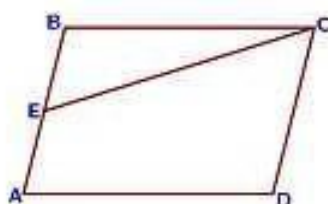
24. Площадь параллелограмма равна 48, а две его стороны равны 8 и 16. Найдите его высоты. В ответе укажите большую высоту.

25. Найдите площадь параллелограмма, изображённого на рисунке:



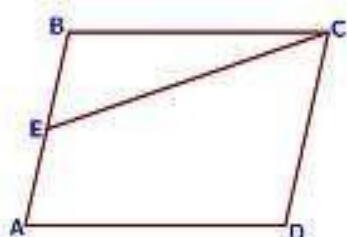
26. Площадь параллелограмма ABCD равна 132. Точка E – середина стороны AB. Найдите площадь треугольника CBE.

27. Площадь параллелограмма ABCD равна 196. Точка E – середина стороны AB. Найдите площадь треугольника CBE.



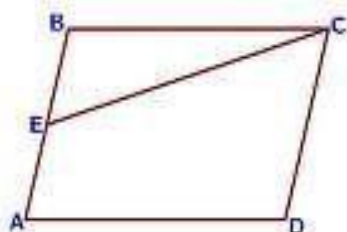
28. Площадь параллелограмма ABCD равна 68. Точка E – середина стороны AB. Найдите площадь треугольника CBE.

29. Площадь параллелограмма ABCD равна 44. Точка E – середина стороны AB. Найдите площадь треугольника CBE.



30. Площадь параллелограмма ABCD равна 60. Точка E – середина стороны AB. Найдите площадь трапеции DAEC.

31. Площадь параллелограмма ABCD равна 128. Точка E – середина стороны AB. Найдите площадь трапеции DAEC.



32. Площадь параллелограмма ABCD равна 180. Точка E – середина стороны AB. Найдите площадь трапеции DAEC.

33. Площадь параллелограмма ABCD равна 76. Точка E – середина стороны AB. Найдите площадь трапеции DAEC.



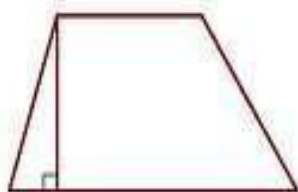
42. Сторона квадрата равна $2\sqrt{2}$. Найдите площадь этого квадрата.



43. Сторона квадрата равна $3\sqrt{3}$. Найдите площадь этого квадрата.

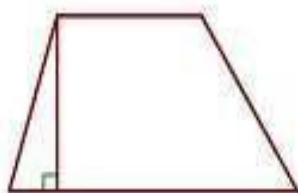
44. Сторона квадрата равна $5\sqrt{3}$. Найдите площадь этого квадрата.

45. Сторона квадрата равна $7\sqrt{2}$. Найдите площадь этого квадрата.



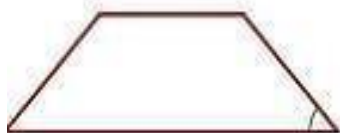
82. Основания трапеции равны 4 и 10, а высота равна 5. Найдите площадь этой трапеции.

83. Основания трапеции равны 7 и 19, а высота равна 6. Найдите площадь этой трапеции.



84. Основания трапеции равны 13 и 23, а высота равна 5. Найдите площадь этой трапеции.

85. Основания трапеции равны 6 и 14, а высота равна 8. Найдите площадь этой трапеции.



86. В равнобедренной трапеции основания равны 4 и 8, а один из углов между боковой стороной и основанием равен 45° . Найдите площадь трапеции.



87. В равнобедренной трапеции основания равны 3 и 7, а один из углов между боковой стороной и основанием равен 45° . Найдите площадь трапеции.



88. В равнобедренной трапеции основания равны 2 и 6, а один из углов между боковой стороной и основанием равен 45° . Найдите площадь трапеции.

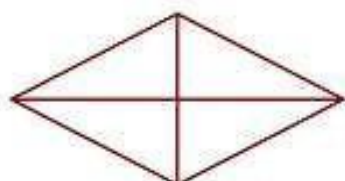
89. В равнобедренной трапеции основания равны 3 и 5, а один из углов между боковой стороной и основанием равен 45° . Найдите площадь трапеции.



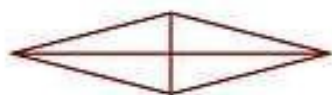
124. Периметр ромба равен 12, а один из углов равен 30° . Найдите площадь ромба.



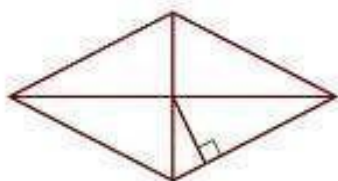
125. Периметр ромба равен 56, а один из углов равен 30° . Найдите площадь ромба.



126. Периметр ромба равен 72, а один из углов равен 30° . Найдите площадь ромба.



127. Периметр ромба равен 48, а один из углов равен 30° . Найдите площадь ромба.



128. Найдите площадь ромба, если его диагонали равны 10 и 6.

129. Найдите площадь ромба, если его диагонали равны 32 и 4.

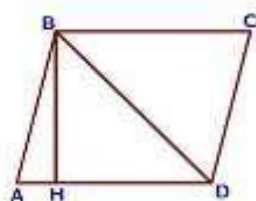
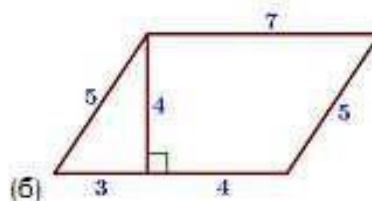
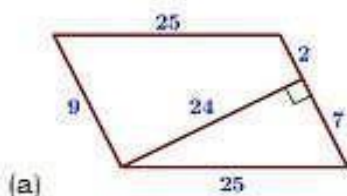
130. Найдите площадь ромба, если его диагонали равны 19 и 6.

131. Найдите площадь ромба, если его диагонали равны 34 и 4.

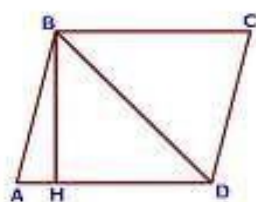
132. Сторона ромба равна 5, а расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до неё равно 2. Найдите площадь ромба.

133. Сторона ромба равна 9, а расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до неё равно 1. Найдите площадь ромба.

4. Найдите площадь параллелограмма, изображённого на рисунке.

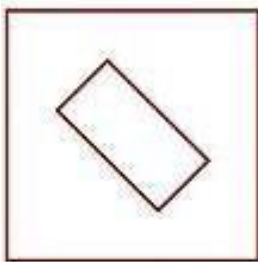


5. Высота BH параллелограмма $ABCD$ делит его сторону AD на отрезки $AH=7$ и $HD=24$. Диагональ параллелограмма BD равна 51. Найдите площадь параллелограмма.



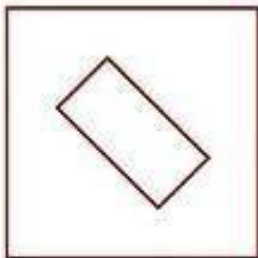
6. Высота BH параллелограмма $ABCD$ делит его сторону AD на отрезки $AH=8$ и $HD=40$. Диагональ параллелограмма BD равна 50. Найдите площадь параллелограмма.

7. Высота BH параллелограмма $ABCD$ делит его сторону AD на отрезки $AH=2$ и $HD=64$. Диагональ параллелограмма BD равна 80. Найдите площадь параллелограмма.



16. Из квадрата со стороной 8 вырезали прямоугольник. Найдите площадь получившейся фигуры, если стороны прямоугольника: 4 и 1.

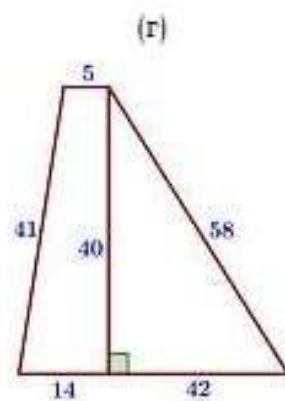
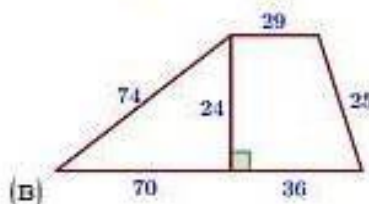
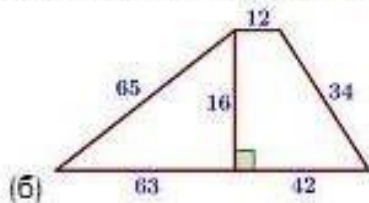
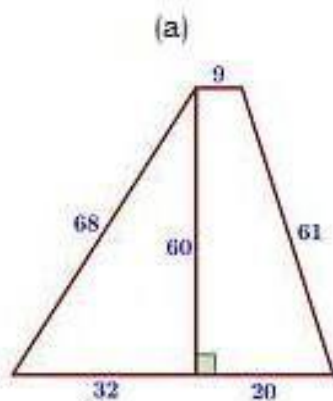
17. Из квадрата со стороной 7 вырезали прямоугольник. Найдите площадь получившейся фигуры, если стороны прямоугольника: 5 и 3.



18. Из квадрата со стороной 6 вырезали прямоугольник. Найдите площадь получившейся фигуры, если стороны прямоугольника: 2 и 3.

19. Из квадрата со стороной 9 вырезали прямоугольник. Найдите площадь получившейся фигуры, если стороны прямоугольника: 3 и 6.*

34. Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.



Используемый ресурс:

1. Яценко И. В., Шестаков С. А. ОГЭ по математике от А до Я. Модульный курс. Геометрия.—М.: МЦНМО, 2019.—224 с.

2. Е. А. Ширяева (www.time4math.ru) Задачник (ОГЭ 2021)

3. СДАМ ГИА: РЕШУ ОГЭ Образовательный портал для подготовки к экзаменам Математика

Занятие 25

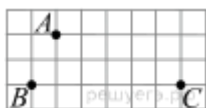
Фигуры на квадратной решётке. Задачи ОГЭ №18

Задание 18 ОГЭ по математике представляет собой задачу по планиметрии на вычисление по готовому чертежу, изображённому на клетчатой бумаге. Данные в таких задачах даются в виде чертежа на бумаге в клетку, причём размеры клеток одинаковы и заданы условием. Это задачи на вычисление углов, расстояний, площадей, связанные со всеми изучаемыми в школьном курсе фигурами. Клетки в таких задачах по сути выполняют роль линейки: посчитав «по клеточкам» необходимые длины и используя известные геометрические факты и свойства, можно довольно быстро получить ответ на вопрос задачи. К этим задачам вплотную примыкают задания на вычисление элементов плоских фигур по готовому чертежу, на котором указаны координаты некоторых точек фигуры (например, вершин треугольника или четырёхугольника), позволяющие после выполнения несложных вычислений ответить на вопрос задачи. При этом, как правило, не требуется применения дополнительных формул метода координат.

<https://math-oge.sdamgia.ru/> решу огэ математика 9 класс 2021

Расстояние от точки до прямой

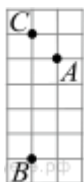
1.



На клетчатой бумаге с размером клетки 1 см х 1 см отмечены точки A , B и C . Найдите расстояние от точки A до прямой BC . Ответ выразите в сантиметрах.

Ответ: 2

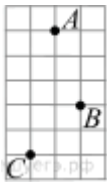
2.



На клетчатой бумаге с размером клетки 1 см х 1 см отмечены точки A , B и C . Найдите расстояние от точки A до прямой BC . Ответ выразите в сантиметрах.

Ответ: 1

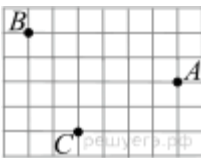
3.



На клетчатой бумаге с размером клетки 1 см х 1 см отмечены точки A , B и C . Найдите расстояние от точки A до середины отрезка BC . Ответ выразите в сантиметрах.

Ответ: 4

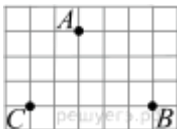
4.



На клетчатой бумаге с размером клетки 1 см х 1 см отмечены точки A , B и C . Найдите расстояние от точки A до середины отрезка BC . Ответ выразите в сантиметрах.

Ответ: 5

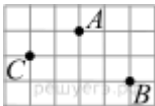
5.



На клетчатой бумаге с размером клетки 1 см $\times$ 1 см отмечены точки A , B и C . Найдите расстояние от точки A до прямой BC . Ответ выразите в сантиметрах.

Ответ: 3

6.



На клетчатой бумаге с размером клетки 1 см $\times$ 1 см отмечены точки A , B и C . Найдите расстояние от точки A до середины отрезка BC . Ответ выразите в сантиметрах.

Ответ: 1,5

7.

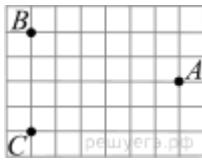


На клетчатой бумаге с размером клетки 1 см $\times$ 1 см отмечены точки A , B и C . Найдите расстояние от точки A до середины отрезка BC . Ответ выразите в сантиметрах.

Ответ: 7

Треугольники общего вида

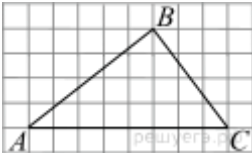
1.



На клетчатой бумаге с размером клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ отмечены точки A , B и C . Найдите расстояние от точки A до середины отрезка BC . Ответ выразите в сантиметрах.

Ответ: 6

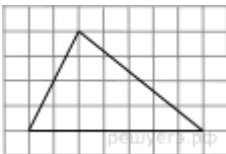
2.



На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC . Найдите длину его высоты, опущенной на сторону AC .

Ответ: 4

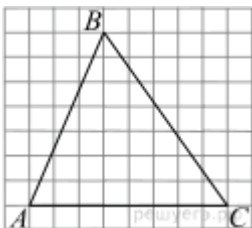
3.



На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите его площадь.

Ответ: 14

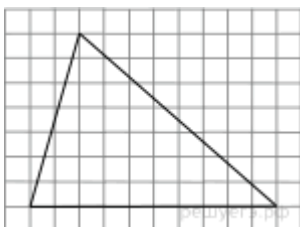
4.



На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC . Найдите длину его средней линии, параллельной стороне AC .

Ответ: 4

5.



На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите его площадь.

Ответ: 35

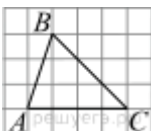
6.



На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите его площадь.

Ответ: 10

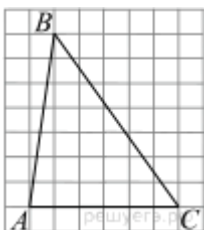
7.



На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC . Найдите длину его средней линии, параллельной стороне AC .

Ответ: 2

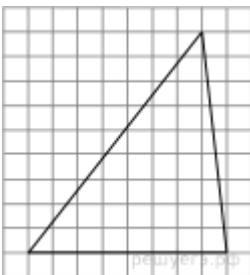
8.



На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC . Найдите длину его средней линии, параллельной стороне AC .

Ответ: 3

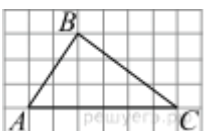
9.



На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите его площадь.

Ответ: 36

10.



На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC . Найдите длину его средней линии, параллельной стороне AC .

Ответ: 3

11.

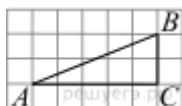


На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC . Найдите длину его средней линии, параллельной стороне AC .

Ответ: 5

Прямоугольный треугольник

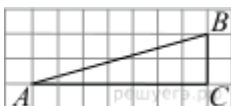
1.



Найдите тангенс угла A треугольника ABC , изображённого на рисунке.

Ответ: 0,4

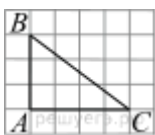
2.



Найдите тангенс угла B треугольника ABC , изображённого на рисунке.

Ответ: 3,5

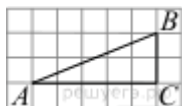
3.



Найдите тангенс угла C треугольника ABC , изображённого на рисунке.

Ответ: 0,75

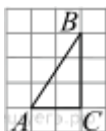
4.



Найдите тангенс угла A треугольника ABC , изображённого на рисунке.

Ответ: 0,4

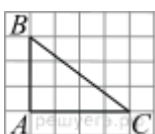
5.



Найдите тангенс угла A треугольника ABC , изображённого на рисунке.

Ответ: 1,5

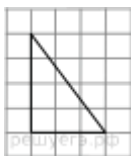
6.



Найдите тангенс угла C треугольника ABC , изображённого на рисунке.

Ответ: 0,75

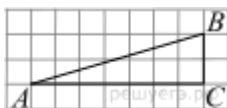
7.



На рисунке изображён прямоугольный треугольник. Найдите длину медианы треугольника, проведённой из вершины прямого угла.

Ответ: 2,5

8.3



Найдите тангенс угла B треугольника ABC , изображённого на рисунке.

Ответ: 3,5

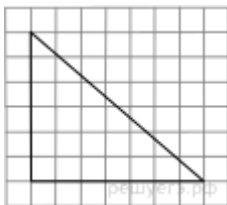
9.



На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображен прямоугольный треугольник. Найдите длину его большего катета.

Ответ: 7

10.

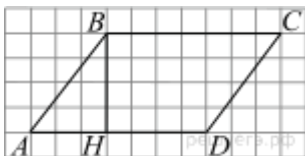


На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён прямоугольный треугольник. Найдите длину его большего катета.

Ответ: 7

Параллелограмм

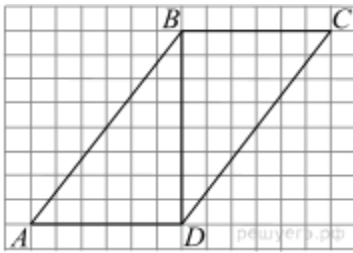
1.



На рисунке изображен параллелограмм $ABCD$. Используя рисунок, найдите $\sin \angle HBA$.

Ответ: 0,6

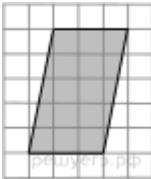
2.



На рисунке с размером клетки 1×1 изображен параллелограмм $ABCD$. Используя рисунок, найдите $\sin \angle BDC$.

Ответ: 0,6

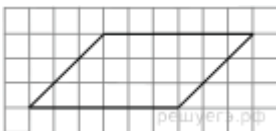
3.



На клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ изображён параллелограмм. Найдите длину его большей высоты. Ответ дайте в сантиметрах.

Ответ: 5

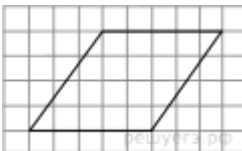
4.



На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён параллелограмм. Найдите его площадь.

Ответ: 18

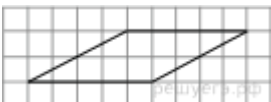
5.



На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён параллелограмм. Найдите его площадь.

Ответ: 20

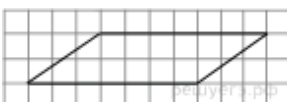
6.



На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён параллелограмм. Найдите его площадь.

Ответ: 10

7.

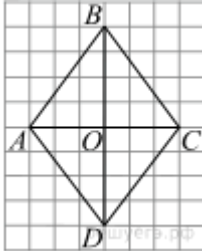


На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён параллелограмм. Найдите его площадь.

Ответ: 14

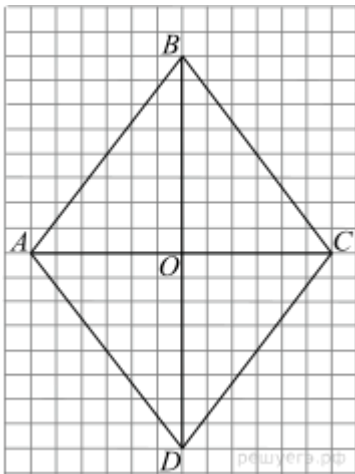
Ромб

1.



На рисунке изображен ромб $ABCD$. Используя рисунок, найдите $\operatorname{tg} \angle OBC$.
 Ответ: 0,75

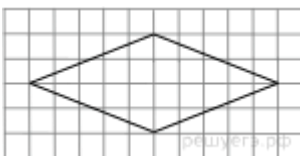
2.



На рисунке изображен ромб $ABCD$. Используя рисунок, найдите $\operatorname{tg} \angle CDO$.

Ответ: 0,75

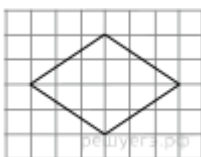
3.



На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён ромб. Найдите длину его большей диагонали.

Ответ: 10

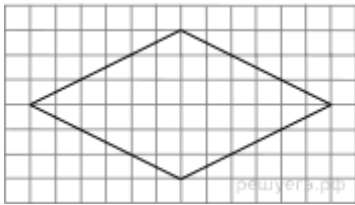
4.



На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён ромб. Найдите длину его большей диагонали.

Ответ: 6

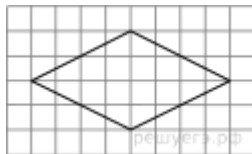
5.



На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён ромб. Найдите длину его большей диагонали.

Ответ: 12

6.

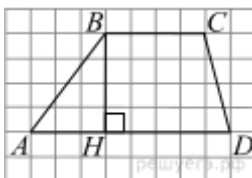


На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён ромб. Найдите длину его большей диагонали.

Ответ: 8

Трапеция

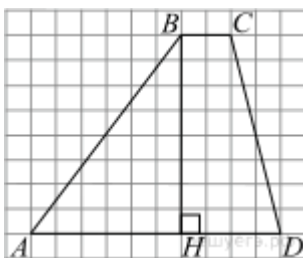
1.



На рисунке изображена трапеция $ABCD$. Используя рисунок, найдите $\sin \angle BAH$.

Ответ: 0,8

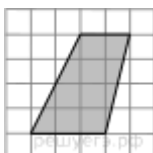
2.



На рисунке изображена трапеция $ABCD$. Используя рисунок, найдите $\cos \angle HBA$.

Ответ: 0,8

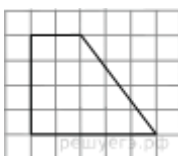
3.



На клетчатой бумаге с размером клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ изображена трапеция. Найдите её площадь. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

Ответ: 10

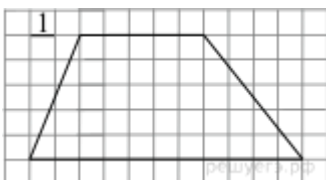
4.



Найдите синус острого угла трапеции, изображённой на рисунке.

Ответ: 0,8

5.



Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.

Ответ: 40

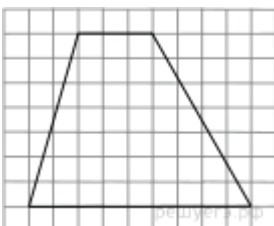
6.



На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите её площадь.

Ответ: 10

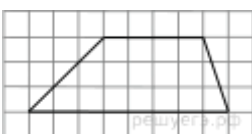
7.



На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите длину её средней линии.

Ответ: 6

8.



На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите её площадь.

Ответ: 18

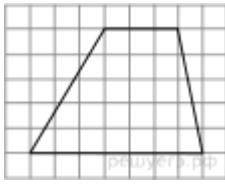
9.



На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите длину её средней линии.

Ответ: 7

10.

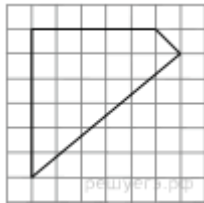


На клетчатой бумаге с размером клетки 1x1 изображена трапеция. Найдите её площадь.

Ответ: 25

Многоугольники

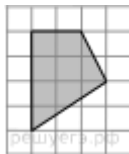
1.



Площадь одной клетки равна 1. Найдите площадь фигуры, изображённой на рисунке.

Ответ: 20,5

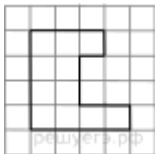
2.



Площадь одной клетки равна 1. Найдите площадь закрашенной фигуры.

Ответ: 8

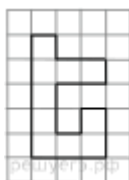
3.



На клетчатой бумаге с размером клетки 1x1 изображена фигура. Найдите её площадь.

Ответ: 11

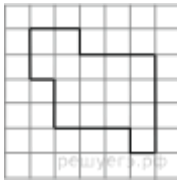
4.



На клетчатой бумаге с размером клетки 1x1 изображена фигура. Найдите её площадь.

Ответ: 10

5.



На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена фигура. Найдите её площадь.

Ответ: 16

Используемый ресурс:

СДАМ ГИА: РЕШУ ОГЭ Образовательный портал для подготовки к экзаменам Математика

Занятие 26

Анализ геометрических высказываний. Задачи ОГЭ №19

Задание 19 ОГЭ по математике заключается в выборе одного или нескольких верных утверждений из множества данных (в настоящее время—из трёх данных). В большинстве случаев правильный ответ на вопрос задачи связан со знанием простейших геометрических фактов и утверждений. Такие задачи позволяют организовать экспресс повторение большинства определений и теорем школьного курса геометрии с целью быстрой диагностики имеющихся пробелов в знаниях и последующего устранения этих пробелов. В качестве примеров рассмотрим чуть более сложные задания на выбор верных утверждений из шести данных.

Пример 1. Укажите в порядке возрастания без пробелов, запятых и прочих дополнительных символов номера верных утверждений.

- 1) Существует прямоугольник, диагонали которого различны.
- 2) В любом прямоугольнике диагонали равны.
- 3) Существует ромб, диагонали которого различны.
- 4) В любом ромбе диагонали равны.
- 5) Существует трапеция, диагонали которой различны.
- 6) В любой трапеции диагонали равны.

Решение. По свойству прямоугольника второе утверждение является верным, а первое—нет. Аналогично из оставшихся утверждений верными являются 3 и 5.

Ответ. 235.

Пример 2. Укажите в порядке возрастания без пробелов, запятых и прочих дополнительных символов номера верных утверждений.

- 1) Существует выпуклый четырёхугольник, все углы которого острые.
- 2) В любом выпуклом четырёхугольнике все углы острые.
- 3) Существует выпуклый четырёхугольник, все углы которого прямые.

- 4) В любом выпуклом четырёхугольнике все углы прямые.
- 5) Существует выпуклый четырёхугольник, все углы которого тупые.
- 6) В любом выпуклом четырёхугольнике все углы тупые.

Решение. Первое утверждение не является верным, поскольку сумма любых четырёх острых углов меньше 360° — суммы углов выпуклого четырёхугольника. Второе утверждение не является верным, пример — квадрат. Третье утверждение является верным, пример — прямоугольник. Четвёртое утверждение не является верным, пример — трапеция. Пятое утверждение не является верным, поскольку сумма любых четырёх тупых углов больше 360° — суммы углов выпуклого четырёхугольника. По этой же причине не является верным и шестое утверждение.

Ответ. 3.

Подготовительные задачи

1. Какие из следующих утверждений верны?

- 1) Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести прямую, параллельную этой прямой.
- 2) Если диагонали параллелограмма равны, то этот параллелограмм является ромбом.
- 3) Расстояние от точки, лежащей на окружности, до центра окружности равно радиусу.

В ответе запишите номера выбранных утверждений в порядке возрастания без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

2. Какое из следующих утверждений верно?

- 1) Вертикальные углы равны.
- 2) Две окружности пересекаются, если радиус одной окружности больше радиуса другой окружности.
- 3) Диагонали трапеции пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.

В ответе запишите номер выбранного утверждения.

3. Какое из следующих утверждений верно?

- 1) Площадь квадрата равна произведению его диагоналей.
- 2) В параллелограмме есть два равных угла.
- 3) Боковые стороны любой трапеции равны.

В ответе запишите номер выбранного утверждения.

4. Какое из следующих утверждений верно?

- 1) Если стороны одного четырёхугольника соответственно равны сторонам другого четырёхугольника, то такие четырёхугольники равны.
- 2) Площадь параллелограмма равна половине произведения его диагоналей.
- 3) Вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности, прямой.

В ответе запишите номер выбранного утверждения.

5. Какие из следующих утверждений верны?

- 1) Существуют три прямые, которые проходят через одну точку.
- 2) Боковые стороны любой трапеции равны.
- 3) Сумма углов равнобедренного треугольника равна 180 градусам.

В ответе запишите номера выбранных утверждений в порядке возрастания без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Используемый ресурс:

1. Яценко И. В., Шестаков С. А. ОГЭ по математике от А до Я. Модульный курс. Геометрия.—М.: МЦНМО, 2019.—134 с.

Занятие 27-29

Алгебраические выражения, уравнения и неравенства

Часть 2. ФИПИ

ПРИМЕРЫ

Задание 20 ОГЭ по математике открывает блок заданий повышенного и высокого уровней сложности и представляет собой алгебраическую задачу по одной из трёх следующих тем: «Преобразование рациональных выражений», «Уравнения и системы уравнений», «Неравенства». Меньше всего в банке заданий ОГЭ для этой позиции экзаменационной работы заданий на преобразование алгебраических выражений. – Для решения уравнений (именно они и составляют самую значительную часть заданий банка ОГЭ по математике на 21-ю позицию экзаменационной работы), как и в более простых задачах с кратким ответом, используются метод введения новой переменной, разложение на множители, условие равенства степеней и другие стандартные приёмы.

Пример 1. Найдите значение выражения при данном условии: $28a - 7b + 13$,
если $\frac{2a - 5b + 8}{5a - 2b + 8} = 6$.

$$\frac{2a - 5b + 8}{5a - 2b + 8} = 6$$

$$2a - 5b + 8 = 6(5a - 2b + 8)$$

$$2a - 5b + 8 = 30a - 12b + 48$$

$$2a - 5b + 8 - 30a + 12b - 48 = 0$$

$$-28a + 7b - 40 = 0$$

$$-28a + 7b = 40$$

$$28a - 7b = -40$$

$$28a - 7b + 13 = -40 + 13 = -27$$

Ответ: -27

Пример 2. Решите уравнение: $x^3 + 5x^2 - 16x - 80 = 0$.

$$\begin{aligned} x^3 + 5x^2 - 16x - 80 &= 0 \\ (x^3 + 5x^2) + (-16x - 80) &= 0 \\ x^2(x+5) - 16(x+5) &= 0 \\ (x+5)(x^2 - 16) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x+5)(x-4)(x+4) &= 0 \\ x+5=0 & \quad x-4=0 & \quad x+4=0 \\ x=-5 & \quad x=4 & \quad x=-4 \end{aligned}$$

Ответ: -5; -4; 4

Пример 3. Решите уравнение: $x^3 + 8x^2 = x + 8$.

$$\begin{aligned} x^3 + 8x^2 &= x + 8 \\ x^2(x+8) &= (x+8) \\ x^2(x+8) - (x+8) &= 0 \\ (x+8)(x^2 - 1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x+8)(x-1)(x+1) &= 0 \\ x+8=0 & \quad x-1=0 & \quad x+1=0 \\ x=-8 & \quad x=1 & \quad x=-1 \end{aligned}$$

Ответ: -8; -1; 1

Пример 4. Решите уравнение: $x^2 - 2x + \sqrt{7-x} = \sqrt{7-x} + 48$.

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + \sqrt{7-x} &= \sqrt{7-x} + 48 \\ x^2 - 2x + \sqrt{7-x} - \sqrt{7-x} - 48 &= 0 \\ \text{ОДЗ:} & \\ 7 - x \geq 0 & \\ x \leq 7 & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 48 &= 0 \\ D &= b^2 - 4ac \\ D &= 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-48) = 4 + 192 = 196 \\ x_1 &= \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 - \sqrt{196}}{2 \cdot 1} = \frac{2 - 14}{2} = \frac{-12}{2} = -6 \\ x_2 &= \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 + \sqrt{196}}{2 \cdot 1} = \frac{2 + 14}{2} = \frac{16}{2} = 8 \\ x = 8 & \text{ не удовлетворяет ОДЗ} \end{aligned}$$

Ответ: -6

Пример 5. Решите уравнение: $x(x^2 + 10x + 25) = 14(x+5)$.

$$\begin{aligned} x(x^2 + 10x + 25) &= 14(x+5) \\ x(x+5)^2 &= 14(x+5) \\ x(x+5)^2 - 14(x+5) &= 0 \\ (x+5)(x(x+5) - 14) &= 0 \\ (x+5)(x^2 + 5x - 14) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+5=0 & \quad x^2 + 5x - 14 = 0 \\ x=-5 & \quad D = b^2 - 4ac \\ D &= 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-14) = 25 + 56 = 81 \\ x_1 &= \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-5 - \sqrt{81}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 - 9}{2} = \frac{-14}{2} = -7 \\ x_2 &= \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-5 + \sqrt{81}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 + 9}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{aligned}$$

Ответ: -7; -5; 2

Пример 6. Решите уравнение: $(x-3)(x^2 + 14x + 49) = 11(x+7)$.

$$\begin{aligned} (x-3)(x^2 + 14x + 49) &= 11(x+7) \\ (x-3)(x+7)^2 &= 11(x+7) \\ (x-3)(x+7)^2 - 11(x+7) &= 0 \\ (x+7)((x-3)(x+7) - 11) &= 0 \\ (x+7)(x^2 + 7x - 3x - 21 - 11) &= 0 \\ (x+7)(x^2 + 4x - 32) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+7=0 & \quad x^2 + 4x - 32 = 0 \\ x=-7 & \quad D = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-32) = 16 + 128 = 144 \\ x_1 &= \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4 - \sqrt{144}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 - 12}{2} = -8 \\ x_2 &= \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4 + \sqrt{144}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 + 12}{2} = 4 \end{aligned}$$

Ответ: -8; -7; 4

Пример 7. Решите уравнение: $(x^2 - 16)^2 + (x^2 + 3x - 28)^2 = 0$.

$$(x^2 - 16)^2 + (x^2 + 3x - 28)^2 = 0$$

$$\begin{aligned} (x^2 - 16)^2 \geq 0 \quad (x^2 + 3x - 28)^2 \geq 0 \\ \begin{cases} x^2 - 16 = 0 \\ x^2 + 3x - 28 = 0 \end{cases} \quad | \cdot (-1) \\ \begin{cases} x^2 - 16 = 0 \\ -x^2 - 3x + 28 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 16 - x^2 - 3x + 28 &= 0 \\ -3x + 12 &= 0 \\ -3x &= -12 \\ x &= \frac{-12}{-3} = 4 \end{aligned}$$

Ответ: 4

Пример 8. Решите уравнение: $\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x} - 40 = 0$.

1) пусть $\frac{1}{x} = t$, тогда уравнение принимает вид:

$$t^2 + 6t - 40 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-40) = 36 + 160 = 196$$

$$t_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-6 - \sqrt{196}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 - 14}{2} = -10$$

$$t_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-6 + \sqrt{196}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 + 14}{2} = 4$$

2) получаем 2 уравнения:

$$\frac{1}{x} = -10$$

$$\frac{1}{x} = 4$$

$$x = -\frac{1}{10}$$

$$x = \frac{1}{4}$$

Ответ: $-\frac{1}{10}$ и $\frac{1}{4}$

Пример 9. Решите уравнение: $\frac{1}{(x-3)^2} - \frac{7}{x-3} - 18 = 0$.

1) пусть $\frac{1}{x-3} = t$, тогда уравнение принимает вид:

$$t^2 - 7t - 18 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-18) = 49 + 72 = 121$$

$$t_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{7 - \sqrt{121}}{2 \cdot 1} = \frac{7 - 11}{2} = -2$$

$$t_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{7 + \sqrt{121}}{2 \cdot 1} = \frac{7 + 11}{2} = 9$$

2) решим 2 получившихся уравнения:

$$\frac{1}{x-3} = -2$$

$$\frac{1}{x-3} = 9$$

$$x-3 = -\frac{1}{2}$$

$$x-3 = \frac{1}{9}$$

$$x = -\frac{1}{2} + 3$$

$$x = \frac{1}{9} + 3$$

$$x = 2\frac{1}{2}$$

$$x = 3\frac{1}{9}$$

Ответ: $2\frac{1}{2}$ и $3\frac{1}{9}$

Пример 10. Решите уравнение: $(x+5)^4 + (x+5)^2 - 12 = 0$.

$$(x+5)^4 + (x+5)^2 - 12 = 0$$

1) пусть $(x+5)^2 = t$ ($t \geq 0$ *) тогда уравнение принимает вид:

$$t^2 + t - 12 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 1 + 48 = 49$$

$$t_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 - 7}{2} = -4$$

$$t_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 + 7}{2} = 3$$

$t = -4$ - не удовлетворяет условию *

2) т.к. $t = 3$, то

$$(x+5)^2 = 3$$

$$(x+5)^2 - 3 = 0$$

$$(x+5)^2 - (\sqrt{3})^2 = 0$$

$$(x+5-\sqrt{3})(x+5+\sqrt{3}) = 0$$

$$x+5-\sqrt{3} = 0$$

$$x+5+\sqrt{3} = 0$$

$$x = -5 + \sqrt{3}$$

$$x = -5 - \sqrt{3}$$

Ответ: $-5 - \sqrt{3}$ и $-5 + \sqrt{3}$

Пример 11. Решите уравнение: $x^4 = (x-42)^2$.

$$x^4 = (x-42)^2$$

$$x^4 - (x-42)^2 = 0$$

$$(x^2 - (x-42))(x^2 + (x-42)) = 0$$

$$(x^2 - x + 42)(x^2 + x - 42) = 0$$

$$x^2 - x + 42 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 42 = -167 < 0$$

действительных корней нет

$$x^2 + x - 42 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-42) = 1 + 168 = 169$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{169}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 - 13}{2} = -7$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{169}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 + 13}{2} = 6$$

Ответ: -7 и 6

Основными методами решения систем алгебраических уравнений школьного курса математики являются следующие:

- подстановка,
- метод введения новой переменной,
- алгебраическое сложение.

Напомним некоторые важные равносильные преобразования систем уравнений (т. е. преобразования, не ведущие ни к потере решений, ни к приобретению посторонних решений):

- перенос слагаемого из одной части уравнения в другую;
- умножение обеих частей уравнения системы на одно и то же отличное от нуля число;
- почленное сложение двух уравнений системы с последующей заменой (не ведущей к изменению области допустимых значений системы) одного из них на уравнение, полученное в результате сложения;
- приведение подобных слагаемых, не ведущее к изменению области допустимых значений системы.

Почленное умножение двух уравнений системы с последующей заменой одного из них на уравнение, полученное в результате умножения, может привести к приобретению посторонних решений. В этом случае следует сделать проверку найденных решений путём их подстановки в данную систему. Преобразования уравнений системы (в частности, приведение

подобных слагаемых) не должны изменять области допустимых значений переменных. Сужение области допустимых значений может привести к потере решений, расширение области допустимых значений—к приобретению посторонних решений.

Пример 12. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 3x^2 - 8x = y, \\ 9x - 24 = y. \end{cases}$

$$\begin{cases} 3x^2 - 8x = y, \\ 9x - 24 = y \end{cases}$$

$$3x^2 - 8x = 9x - 24$$

$$3x^2 - 8x - 9x + 24 = 0$$

$$3x^2 - 17x + 24 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = (-17)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 24 = 289 - 288 = 1$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{17 - \sqrt{1}}{2 \cdot 3} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{17 + \sqrt{1}}{2 \cdot 3} = \frac{18}{6} = 3$$

если $x = 2\frac{2}{3}$, то

$$y = 9x - 24 = 9 \cdot 2\frac{2}{3} - 24 = 24 - 24 = 0$$

если $x = 3$, то

$$y = 9x - 24 = 9 \cdot 3 - 24 = 27 - 24 = 3$$

Ответ: $\left(2\frac{2}{3}; 0\right)$ и $(3; 3)$

Пример 13. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 7x^2 + y = 14, \\ 2x^2 - y = 22. \end{cases}$

$$\begin{cases} 7x^2 + y = 14, \\ 2x^2 - y = 22; \end{cases}$$

$$9x^2 + 0 = 36 \quad |:9$$

$$x^2 = 4$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$(x-2)(x+2) = 0$$

$$x-2=0 \quad x+2=0$$

$$x=2 \quad x=-2$$

если $x = 2$, то

$$7 \cdot 2^2 + y = 14$$

$$y = 14 - 28$$

$$y = -14$$

если $x = -2$, то

$$7 \cdot (-2)^2 + y = 14$$

$$y = 14 - 28$$

$$y = -14$$

Ответ: $(-2; -14)$ и $(2; -14)$

Пример 14. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 59, \\ 10x^2 + 5y^2 = 59x. \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 59, \\ 10x^2 + 5y^2 = 59x \end{cases} \quad |:5$$

$$10x^2 + 5y^2 = 295,$$

$$10x^2 + 5y^2 = 59x$$

$$59x = 295$$

$$x = 5$$

при $x = 5$:

$$2x^2 + y^2 = 59$$

$$2 \cdot 5^2 + y^2 = 59$$

$$y^2 = 59 - 50$$

$$y^2 = 9$$

$$y^2 - 9 = 0$$

$$(y-3)(y+3) = 0$$

$$y-3=0 \quad y+3=0$$

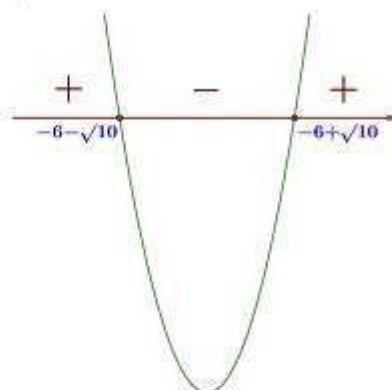
$$y=3 \quad y=-3$$

Ответ: $(5; -3)$ и $(5; 3)$

Неравенства, которые в банке ОГЭ предназначены для задания 20 в экзаменационном варианте, либо являются квадратными, либо сводятся к квадратным в одно-два действия. Сложность здесь связана преимущественно с тем, что коэффициенты и/или корни соответствующих квадратных трёхчленов являются иррациональными.

Пример 15. Решите неравенство: $\frac{-21}{(x+6)^2-10} \geq 0$.

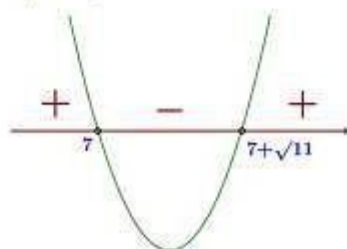
$$\begin{aligned} \frac{-21}{(x+6)^2-10} \geq 0, \text{ т.к. } -21 < 0, \text{ то} \\ (x+6)^2-10 < 0 \\ (x+6)^2-(\sqrt{10})^2 < 0 \\ (x+6-\sqrt{10})(x+6+\sqrt{10}) < 0 \\ (x+6-\sqrt{10})(x+6+\sqrt{10}) = 0 \\ x+6-\sqrt{10} = 0 \quad x+6+\sqrt{10} = 0 \\ x = -6+\sqrt{10} \quad x = -6-\sqrt{10} \end{aligned}$$



Ответ: $x \in (-6-\sqrt{10}; -6+\sqrt{10})$

Пример 16. Решите неравенство: $(x-7)^2 < \sqrt{11}(x-7)$.

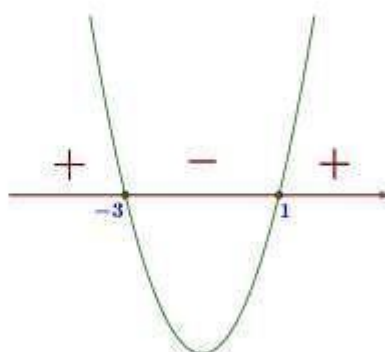
$$\begin{aligned} (x-7)^2 - \sqrt{11}(x-7) < 0 \\ (x-7)(x-7-\sqrt{11}) < 0 \\ (x-7)(x-7-\sqrt{11}) = 0 \\ x-7 = 0 \quad x-7-\sqrt{11} = 0 \\ x = 7 \quad x = 7+\sqrt{11} \end{aligned}$$



Ответ: $x \in (7; 7+\sqrt{11})$

Пример 17. Решите неравенство: $\frac{-17}{x^2+2x-3} \leq 0$.

$$\begin{aligned} \frac{-17}{x^2+2x-3} \leq 0, \text{ т.к. } -17 < 0, \text{ то} \\ x^2+2x-3 > 0 \\ x^2+2x-3 = 0 \\ D = b^2 - 4ac \\ D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16 \\ x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-2-\sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{-2-4}{2} = -3 \\ x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-2+\sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{-2+4}{2} = 1 \end{aligned}$$



Ответ: $x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$

Алгебраические выражения, уравнения и неравенства

Часть 2. ФИПИ. Расширенная версия

Пример 1. Упростите выражение: $\frac{12^{n+4}}{2^{2n+5} \cdot 3^{n+2}}$.

$$\frac{12^{n+4}}{2^{2n+5} \cdot 3^{n+2}} = \frac{(2^2 \cdot 3)^{n+4}}{2^{2n+5} \cdot 3^{n+2}} = \frac{2^{2n+8} \cdot 3^{n+4}}{2^{2n+5} \cdot 3^{n+2}} = 2^{2n+8-(2n+5)} \cdot 3^{n+4-(n+2)} = 2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = 72$$

Пример 2. Сократите дробь: $\frac{p(a)}{p\left(\frac{1}{a}\right)}$, если $p(x) = \left(x + \frac{6}{x}\right)\left(6x + \frac{1}{x}\right)$.

$$\frac{p(a)}{p\left(\frac{1}{a}\right)} = \frac{\left(a + \frac{6}{a}\right)\left(6a + \frac{1}{a}\right)}{\left(\frac{1}{a} + \frac{6}{1/a}\right)\left(6\frac{1}{a} + \frac{1}{1/a}\right)} = \frac{\left(a + \frac{6}{a}\right)\left(6a + \frac{1}{a}\right)}{\left(\frac{1}{a} + 6a\right)\left(\frac{6}{a} + a\right)} = 1$$

Пример 3. Сократите дробь: $\frac{p(a)}{p(18-a)}$, если $p(x) = \frac{x(18-x)}{x-9}$.

$$\frac{p(a)}{p(18-a)} = p(a) : p(18-a) = \frac{a(18-a)}{a-9} : \frac{(18-a)(18-(18-a))}{(18-a)-9} = \frac{a(18-a)}{a-9} \cdot \frac{9-a}{(18-a)a} = -1$$

Пример 4. Сократите дробь: $\frac{x^3 - 2x^2 - 16x + 32}{(x-2)(x-4)}$.

$$\begin{aligned} \frac{x^3 - 2x^2 - 16x + 32}{(x-2)(x-4)} &= \frac{(x^3 - 2x^2) + (-16x + 32)}{(x-2)(x-4)} = \frac{x^2(x-2) - 16(x-2)}{(x-2)(x-4)} = \frac{(x-2)(x^2 - 16)}{(x-2)(x-4)} = \\ &= \frac{(x-2)(x-4)(x+4)}{(x-2)(x-4)} = x+4 \end{aligned}$$

Пример 5. Сократите дробь: $\frac{a^2 - 36}{ab - 6b - 7a + 42}$.

$$\frac{a^2 - 36}{ab - 6b - 7a + 42} = \frac{(a-6)(a+6)}{(ab-6b)+(-7a+42)} = \frac{(a-6)(a+6)}{b(a-6)-7(a-6)} = \frac{(a-6)(a+6)}{(a-6)(b-7)} = \frac{a+6}{b-7} \text{ при } a \neq 6$$

Пример 6. Решите уравнение: $(4x-9)^2(x-3) = (4x-9)(x-3)^2$.

$$\begin{aligned} (4x-9)^2(x-3) &= (4x-9)(x-3)^2 \\ (4x-9)^2(x-3) - (4x-9)(x-3)^2 &= 0 \\ (4x-9)(x-3)(4x-9-(x-3)) &= 0 \\ (4x-9)(x-3)(3x-6) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll} 4x-9=0 & x-3=0 & 3x-6=0 \\ 4x=9 & x=3 & 3x=6 \\ x=2,25 & x=3 & x=2 \end{array}$$

Ответ: 2; 2,25; 3

Пример 7. Решите уравнение: $(x+3)^3 = 9(x+3)$.

$$(x+3)^3 = 9(x+3)$$

$$(x+3)^3 - 9(x+3) = 0$$

$$(x+3)((x+3)^2 - 9) = 0$$

$$(x+3)(x^2 + 6x + 9 - 9) = 0$$

$$(x+3)(x^2 + 6x) = 0$$

$$(x+3)x(x+6) = 0$$

$$x+3=0 \quad x=0 \quad x+6=0$$

$$x=-3 \quad \quad \quad x=-6$$

Ответ: -6; -3; 0

Пример 8. Решите уравнение: $(x-1)(x+7)(x-8) = (x-1)(x-8)(x+11)$.

$$(x-1)(x+7)(x-8) = (x-1)(x-8)(x+11)$$

$$(x-1)(x+7)(x-8) - (x-1)(x-8)(x+11) = 0$$

$$(x-1)(x-8)(x+7 - (x+11)) = 0$$

$$(x-1)(x-8)(x+7 - x - 11) = 0$$

$$(x-1)(x-8)(-4) = 0$$

$$x-1=0 \quad x-8=0$$

$$x=1 \quad \quad x=8$$

Ответ: 1 и 8

Пример 9. Решите уравнение: $4x^2 - 7x + 13 = (x+3)^2$.

$$4x^2 - 7x + 13 = (x+3)^2$$

$$4x^2 - 7x + 13 = x^2 + 6x + 9$$

$$4x^2 - 7x + 13 - x^2 - 6x - 9 = 0$$

$$3x^2 - 13x + 4 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = 13^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = 169 - 48 = 121$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{13 - \sqrt{121}}{2 \cdot 3} = \frac{13 - 11}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{13 + \sqrt{121}}{2 \cdot 3} = \frac{13 + 11}{6} = \frac{24}{6} = 4$$

Ответ: $\frac{1}{3}$ и 4

Пример 10. Решите уравнение: $x^6 = (11x - 18)^3$.

$$x^6 = (11x - 18)^3$$

$$(x^2)^3 = (11x - 18)^3$$

$$x^2 = 11x - 18$$

$$x^2 - 11x + 18 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = (-11)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18 = 121 - 72 = 49$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{11 - \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{11 - 7}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{11 + \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{11 + 7}{2} = 9$$

Ответ: 2 и 9

Пример 11. Решите уравнение: $x^3 = 4x^2 + 21x$.

$$x^3 = 4x^2 + 21x$$

$$x^3 - 4x^2 - 21x = 0$$

$$x(x^2 - 4x - 21) = 0$$

$$x = 0 \quad x^2 - 4x - 21 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-21) = 16 + 84 = 100$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{4 - \sqrt{100}}{2 \cdot 1} = \frac{4 - 10}{2} = -3$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{4 + \sqrt{100}}{2 \cdot 1} = \frac{4 + 10}{2} = 7$$

Ответ: -3; 0; 7

Пример 12. Решите уравнение: $(x-5)^2(x-2) = 4(x-5)$.

$$(x-5)^2(x-2) = 4(x-5)$$

$$(x-5)^2(x-2) - 4(x-5) = 0$$

$$(x-5)^2(x-2) - 4(x-5) = 0$$

$$(x-5)((x-5)(x-2) - 4) = 0$$

$$(x-5)(x^2 - 5x - 2x + 10 - 4) = 0$$

$$(x-5)(x^2 - 7x + 6) = 0$$

$$x - 5 = 0 \quad x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$x = 5 \quad D = b^2 - 4ac$$

$$D = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 49 - 24 = 25$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{7 - \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{7 - 5}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{7 + \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{7 + 5}{2} = 6$$

Ответ: 1; 5; 6

Пример 13. Решите систему уравнений: $\begin{cases} (3x+7y)^2 = 10y, \\ (3x+7y)^2 = 10x \end{cases}$

$$\begin{cases} (3x+7y)^2 = 10y, \\ (3x+7y)^2 = 10x \end{cases}$$

$$10x = 10y \quad |:10$$

$$x = y$$

$$x = y$$

$$(3y+7y)^2 = 10y$$

$$100y^2 - 10y = 0$$

$$10y(y-1) = 0$$

$$y = 0 \quad y - 1 = 0$$

$$y = 1$$

$$\text{если } y = 0, \text{ то } x = 0$$

$$\text{если } y = 1, \text{ то } x = 1$$

Ответ: (0; 0) и (1; 1)

Пример 14. Решите систему уравнений: $\begin{cases} y - 2x = 2, \\ x^2 + 2xy - y^2 = 8. \end{cases}$

$$\begin{cases} y - 2x = 2, \\ x^2 + 2xy - y^2 = 8 \end{cases}$$

$$x^2 + 2xy - y^2 = 8$$

$$y = 2 + 2x,$$

$$x^2 + 2x(2+2x) - (2+2x)^2 = 8$$

$$x^2 + 4x + 4x^2 - (4 + 8x + 4x^2) = 8$$

$$x^2 + 4x + 4x^2 - 4 - 8x - 4x^2 - 8 = 0$$

$$x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4, \\ x_1 \cdot x_2 = -12 \end{cases}$$

$$x_1 \cdot x_2 = -12$$

$$\begin{cases} x_1 = -2, \\ x_2 = 6 \end{cases}$$

$$x_2 = 6$$

$$\text{если } x = -2, \text{ то}$$

$$y = 2 + 2x = 2 + 2 \cdot (-2) = -2$$

$$\text{если } x = 6, \text{ то}$$

$$y = 2 + 2x = 2 + 2 \cdot 6 = 14$$

Ответ: (-2; -2) и (6; 14)

Пример 15. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2 + y = 7, \\ 2x^2 - y = 20. \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 + y = 7, \\ 2x^2 - y = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 7 - x^2, \\ 2x^2 - (7 - x^2) = 20 \end{cases}$$

$$2x^2 - 7 + x^2 = 20$$

$$2x^2 + x^2 = 20 + 7$$

$$3x^2 = 27 \quad |:3$$

$$x^2 = 9$$

$$x^2 - 9 = 0$$

$$(x-3)(x+3) = 0$$

$$x-3=0 \quad x+3=0$$

$$x=3 \quad x=-3$$

если $x=3$, то

$$y = 7 - x^2 = 7 - 3^2 = 7 - 9 = -2$$

если $x=-3$, то

$$y = 7 - x^2 = 7 - (-3)^2 = 7 - 9 = -2$$

Ответ: $(-3; -2)$ и $(3; -2)$

Пример 16. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x - 3y = 7, \\ \frac{x}{5} + \frac{y+4}{4} = -1. \end{cases}$

$$\begin{cases} x - 3y = 7, \\ \frac{x}{5} + \frac{y+4}{4} = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 7 + 3y, \\ \frac{x}{5} + \frac{y+4}{4} = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 7 + 3y, \\ \frac{4x}{20} + \frac{5y+20}{20} = \frac{-20}{20} \end{cases} \quad |:20$$

$$x = 7 + 3y,$$

$$4x + 5y + 20 = -20$$

$$4(7 + 3y) + 5y + 20 = -20$$

$$28 + 12y + 5y + 20 = -20$$

$$17y = -20 - 20 - 28$$

$$17y = -68$$

$$y = -68 : 17 = -4$$

$$\text{при } y = -4:$$

$$x = 7 + 3 \cdot (-4) = 7 - 12 = -5$$

Ответ: $(-5; -4)$

Пример 17. Решите систему уравнений: $\begin{cases} (x-5)(y-8)=0, \\ \frac{y-6}{x+y-11}=4. \end{cases}$

$$\begin{cases} (x-5)(y-8)=0, \\ \frac{y-6}{x+y-11}=4 \end{cases}$$

$$*(x-5)(y-8)=0$$

$$x-5=0 \quad y-8=0$$

$$x=5 \quad y=8$$

если $x=5$, то

$$\frac{y-6}{5+y-11}=4$$

$$\frac{y-6}{y-6}=4$$

$$1=4$$

корней нет

если $y=8$, то

$$\frac{8-6}{x+8-11}=4$$

$$\frac{2}{x-3}=4$$

$$x-3=\frac{2}{4}$$

$$x-3=\frac{1}{2}$$

$$x=3+\frac{1}{2}=3\frac{1}{2}$$

Ответ: $(3\frac{1}{2}; 8)$

Пример 18. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2 = 7y - 3, \\ x^2 + 19 = 7y + y^2. \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 = 7y - 3, \\ x^2 + 19 = 7y + y^2 \end{cases}$$

$$7y - 3 + 19 = 7y + y^2$$

$$7y - 3 + 19 - 7y - y^2 = 0$$

$$16 - y^2 = 0$$

$$(4 - y)(4 + y) = 0$$

$$4 - y = 0 \quad 4 + y = 0$$

$$y = 4 \quad y = -4$$

если $y = 4$, то

$$x^2 = 7 \cdot 4 - 3$$

$$x^2 = 25$$

$$x^2 - 25 = 0$$

$$(x - 5)(x + 5) = 0$$

$$x - 5 = 0 \quad x + 5 = 0$$

$$x = 5 \quad x = -5$$

если $y = -4$, то

$$x^2 = 7 \cdot (-4) - 3$$

$$x^2 = -31$$

корней нет

Ответ: $(-5; 4)$ и $(5; 4)$

Пример 19. Решите неравенство: $(4x + 1)(x - 2) > -5$.

$$(4x + 1)(x - 2) > -5$$

$$4x^2 - 8x + x - 2 + 5 > 0$$

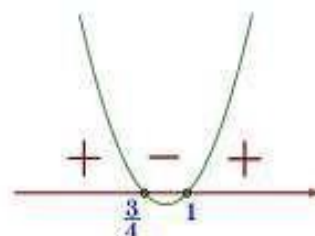
$$4x^2 - 7x + 3 > 0$$

$$4x^2 - 7x + 3 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = 49 - 48 = 1$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{7 - \sqrt{1}}{2 \cdot 4} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{7 + \sqrt{1}}{2 \cdot 4} = \frac{8}{8} = 1$$



Ответ: $x \in \left(-\infty; \frac{3}{4}\right) \cup (1; +\infty)$

Пример 20. Решите неравенство: $(x - 6)^2 \geq (6x - 1)^2$.

$$(x - 6)^2 \geq (6x - 1)^2$$

$$(x - 6)^2 - (6x - 1)^2 \geq 0$$

$$(x^2 - 12x + 36) - (36x^2 - 12x + 1) \geq 0$$

$$x^2 - 12x + 36 - 36x^2 + 12x - 1 \geq 0$$

$$-35x^2 + 35 \geq 0 \quad | :(-35)$$

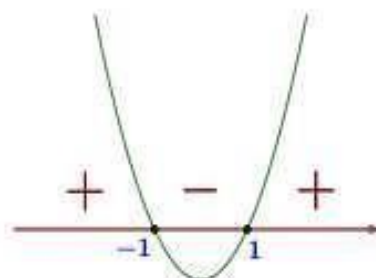
$$x^2 - 1 \leq 0$$

$$x^2 - 1 = 0$$

$$(x - 1)(x + 1) = 0$$

$$x - 1 = 0 \quad x + 1 = 0$$

$$x = 1 \quad x = -1$$



Ответ: $x \in [-1; 1]$

Пример 21. Решите неравенство: $\frac{x^2}{4} < \frac{4x-5}{3}$.

$$\frac{x^2}{4} < \frac{4x-5}{3}$$

$$\frac{3x^2}{12} < \frac{16x-20}{12} \quad | \cdot 12$$

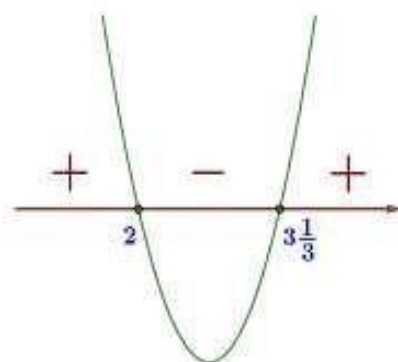
$$3x^2 < 16x - 20$$

$$3x^2 - 16x + 20 < 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-16)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 20 = 256 - 240 = 16$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{16 - \sqrt{16}}{2 \cdot 3} = \frac{16 - 4}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{16 + \sqrt{16}}{2 \cdot 3} = \frac{16 + 4}{6} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$$



Ответ: $x \in (2; 3\frac{1}{3})$

Пример 22. Решите неравенство: $x^2(-x^2-16) \leq 100(-x^2-16)$.

$$x^2(-x^2-16) \leq 100(-x^2-16) \quad | :(-x^2-16) < 0$$

$$x^2 \geq 100$$

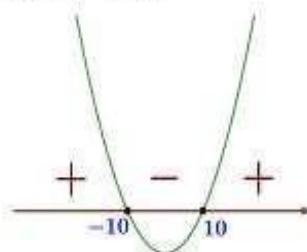
$$x^2 - 100 \geq 0$$

$$x^2 - 100 = 0$$

$$(x-10)(x+10) = 0$$

$$x-10=0 \quad x+10=0$$

$$x=10 \quad x=-10$$



Ответ: $x \in (-\infty; -10] \cup [10; +\infty)$

Пример 23. Решите систему неравенств: $\begin{cases} 2(3x+5) - 7(2x+3) > 3x, \\ (x-4)(x+7) < 0. \end{cases}$

$$\begin{cases} 2(3x+5) - 7(2x+3) > 3x, * \\ (x-4)(x+7) < 0 ** \end{cases}$$

$$**(x-4)(x+7) < 0$$

$$(x-4)(x+7) = 0$$

$$x-4=0 \quad x+7=0$$

$$x=4 \quad x=-7$$

$$*2(3x+5) - 7(2x+3) > 3x$$

$$6x+10-14x-21-3x > 0$$

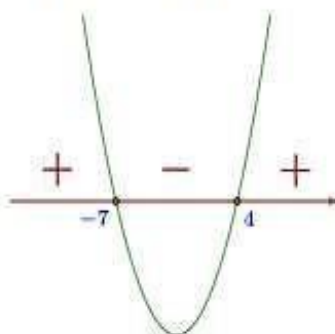
$$-11x-11 > 0$$

$$-11x > 11 \quad | :(-11)$$

$$x < -1$$

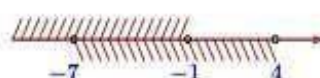


$x \in (-\infty; -1)$



$x \in (-7; 4)$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -1), \\ x \in (-7; 4) \end{cases}$$



$x \in (-7; -1)$

Пример 24. Решите систему неравенств:
$$\begin{cases} \frac{8-x}{4+(1-5x)^2} \geq 0, \\ 3-7x \leq 23-2x. \end{cases}$$

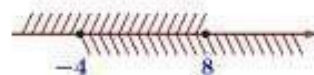
$$\begin{cases} \frac{8-x}{4+(1-5x)^2} \geq 0, \\ 3-7x \leq 23-2x \end{cases}$$

т.к. $4+(1-5x)^2 > 0$, то

$$\begin{cases} 8-x \geq 0, \\ -7x+2x \leq 23-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x \geq -8, & | :(-1) \\ -5x \leq 20 & | :(-5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 8, \\ x \geq -4 \end{cases}$$



Ответ: $x \in [-4; 8]$

Алгебраические выражения, уравнения и неравенства

Часть 2. ФИПИ Реши сам

Задание 1. Найдите значение выражения при данном условии:

- | | |
|--|--|
| 1) $31a-4b+55$, если $\frac{a-4b+7}{4a-b+7} = 8$; | 4) $61a-11b+50$, если $\frac{2a-7b+5}{7a-2b+5} = 9$; |
| 2) $19a-7b+12$, если $\frac{5a-8b+2}{8a-5b+2} = 3$; | 5) $25a-5b+22$, если $\frac{3a-7b+6}{7a-3b+6} = 4$; |
| 3) $39a-15b+25$, если $\frac{3a-6b+4}{6a-3b+4} = 7$; | 6) $41a-11b+15$, если $\frac{4a-9b+3}{9a-4b+3} = 5$. |

Задание 2. Решите уравнение:

- | | |
|-------------------------|-------------------------|
| 1) $x^3+2x^2-x-2=0$; | 7) $x^3+5x^2=4x+20$; |
| 2) $x^3+3x^2-4x-12=0$; | 8) $x^3+2x^2=9x+18$; |
| 3) $x^3+2x^2-9x-18=0$; | 9) $x^3+7x^2=4x+28$; |
| 4) $x^3+5x^2-x-5=0$; | 10) $x^3+6x^2=9x+54$; |
| 5) $x^3+4x^2-x-4=0$; | 11) $x^3+3x^2=16x+48$; |
| 6) $x^3+5x^2-9x-45=0$; | 12) $x^3+4x^2=9x+36$. |

Задание 3. Решите уравнение:

- | | |
|--|-------------------------------|
| 1) $x^2-2x+\sqrt{4-x}=\sqrt{4-x}+15$; | 7) $x(x^2+2x+1)=2(x+1)$; |
| 2) $x^2-3x+\sqrt{3-x}=\sqrt{3-x}+10$; | 8) $x(x^2+4x+4)=3(x+2)$; |
| 3) $x^2-2x+\sqrt{6-x}=\sqrt{6-x}+35$; | 9) $x(x^2+2x+1)=6(x+1)$; |
| 4) $x^2-3x+\sqrt{5-x}=\sqrt{5-x}+18$; | 10) $x(x^2+6x+9)=4(x+3)$; |
| 5) $x^2-2x+\sqrt{2-x}=\sqrt{2-x}+3$; | 11) $x(x^2+4x+4)=8(x+2)^*$; |
| 6) $x^2-6x+\sqrt{6-x}=\sqrt{6-x}+7$; | 12) $x(x^2+6x+9)=10(x+3)^*$. |

Задание 4. Решите уравнение:

1) $(x-1)(x^2+8x+16)=6(x+4)$;

2) $(x-1)(x^2+4x+4)=4(x+2)$;

3) $(x-2)(x^2+6x+9)=6(x+3)$;

4) $(x-2)(x^2+2x+1)=4(x+1)$;

5) $(x-1)(x^2+6x+9)=5(x+3)$;

6) $(x-2)(x^2+8x+16)=7(x+4)$;

7) $(x^2-1)^2+(x^2-6x-7)^2=0$;

8) $(x^2-9)^2+(x^2-2x-15)^2=0$;

9) $(x^2-4)^2+(x^2-3x-10)^2=0$;

10) $(x^2-36)^2+(x^2+4x-12)^2=0$;

11) $(x^2-25)^2+(x^2+2x-15)^2=0$;

12) $(x^2-49)^2+(x^2+4x-21)^2=0$.

Задание 5. Решите уравнение:

1) $x^6=(6x-5)^3$;

4) $x^3=3x^2+4x$;

7) $(x-2)^2(x-3)=20(x-2)$;

2) $x^6=(7x-12)^3$;

5) $x^3=2x^2+8x$;

8) $(x-2)^2(x-3)=12(x-2)$.

3) $x^6=(6x-8)^3$;

6) $x^3=4x^2+5x$;

Задание 5. Решите уравнение:

1) $\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}-12=0$;

7) $\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{1}{x-2}-6=0$;

2) $\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}-4=0$;

8) $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{4}{x-1}-12=0$;

3) $\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}-3=0$;

9) $\frac{1}{(x-3)^2}-\frac{3}{x-3}-4=0$;

4) $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-6=0$;

10) $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-10=0$;

5) $\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}-10=0$;

11) $\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{5}{x-2}-14=0^*$;

6) $\frac{1}{x^2}-\frac{5}{x}-14=0^*$;

12) $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{x-1}-3=0$.

Задание 6. Решите уравнение:

1) $(x+4)^4-6(x+4)^2-7=0$;

7) $x^4=(x-20)^2$;

2) $(x-2)^4-(x-2)^2-6=0$;

8) $x^4=(3x-10)^2$;

3) $(x+3)^4-2(x+3)^2-8=0$;

9) $x^4=(4x-5)^2$;

4) $(x-4)^4-4(x-4)^2-21=0$;

10) $x^4=(2x-15)^2$;

5) $(x+2)^4-4(x+2)^2-5=0$;

11) $x^4=(x-6)^2$;

6) $(x-3)^4-3(x-3)^2-10=0$;

12) $x^4=(3x-4)^2$.

Задание 7. Решите систему уравнений:

$$1) \begin{cases} 3x^2 - 4x = y, \\ 3x - 4 = y; \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} 4x^2 + y = 9, \\ 8x^2 - y = 3; \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} x^2 + 3y^2 = 31, \\ 2x^2 + 6y^2 = 31x; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 9x^2 - 14x = y, \\ 9x - 14 = y; \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} 3x^2 + y = 4, \\ 2x^2 - y = 1; \end{cases}$$

$$14) \begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 50, \\ 12x^2 + 8y^2 = 50x; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 4x^2 - 3x = y, \\ 8x - 6 = y; \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} 2x^2 + y = 4, \\ 4x^2 - y = 2; \end{cases}$$

$$15) \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 25, \\ 3x^2 + 12y^2 = 25x; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 7x^2 - 5x = y, \\ 7x - 5 = y; \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} 5x^2 + y = 12, \\ 9x^2 - y = 2; \end{cases}$$

$$16) \begin{cases} 5x^2 + y^2 = 61, \\ 15x^2 + 3y^2 = 61x; \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 4x^2 - 5x = y, \\ 8x - 10 = y; \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} x^2 + y = 7, \\ 2x^2 - y = 5; \end{cases}$$

$$17) \begin{cases} 2x^2 + y^2 = 36, \\ 8x^2 + 4y^2 = 36x; \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 5x^2 - 11x = y, \\ 5x - 11 = y; \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} 3x^2 + y = 9, \\ 7x^2 - y = 1; \end{cases}$$

$$18) \begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 21, \\ 6x^2 + 9y^2 = 21x. \end{cases}$$

Задание 8. Решите неравенство:

$$1) (x-1)^2 < \sqrt{2}(x-1);$$

$$7) \frac{-10}{(x-3)^2-5} \geq 0;$$

$$13) \frac{-14}{x^2+2x-15} \leq 0;$$

$$2) (x-8)^2 < \sqrt{3}(x-8);$$

$$8) \frac{-18}{(x+4)^2-10} \geq 0;$$

$$14) \frac{-19}{x^2+x-12} \leq 0;$$

$$3) (x-5)^2 < \sqrt{7}(x-5);$$

$$9) \frac{-14}{(x-5)^2-2} \geq 0;$$

$$15) \frac{-25}{x^2+9x-10} \leq 0^*;$$

$$4) (x-6)^2 < \sqrt{10}(x-6);$$

$$10) \frac{-16}{(x+2)^2-5} \geq 0;$$

$$16) \frac{-23}{x^2+6x-16} \leq 0^*.$$

$$5) (x-3)^2 < \sqrt{5}(x-3);$$

$$11) \frac{-13}{(x-4)^2-6} \geq 0;$$

$$6) (x-4)^2 < \sqrt{6}(x-4);$$

$$12) \frac{-15}{(x+1)^2-3} \geq 0;$$

Используемый ресурс:

1. Яценко И. В., Шестаков С. А. ОГЭ по математике от А до Я. Модульный курс. Алгебра.—М.: МЦНМО, 2019.—224 с.

2. Е. А. Ширяева (www.time4math.ru) Задачник (ОГЭ 2021)

3. СДАМ ГИА: РЕШУ ОГЭ Образовательный портал для подготовки к экзаменам Математика

Занятие 30 - 33

Текстовые задачи «на движение». Текстовые задачи «на сплавы». Текстовые задачи «на смеси». Текстовые задачи «на работу». Задачи ОГЭ №21

Задание 21 ОГЭ по математике представляет собой традиционную текстовую задачу по одной из трёх тем: «Движение», «Производительность и работа», «Проценты и концентрация». Некоторые из этих задач можно решить арифметически, не прибегая к составлению уравнения, другие требуют составления одного или двух уравнений и их решения.

Задачи на движение

Во всех задачах на движение допускается определённая идеализация: считается, что тела движутся прямолинейно и равномерно, скорости (в том числе скорость течения) постоянны в течение определённых промежутков времени, не меняются при поворотах и т. д., движущиеся тела считаются (если не оговорено противное) материальными точками, т. е. не имеющими размеров и массы (вернее, их размеры и масса несущественны для решения задачи). Даже решение задач на движение по окружности не требует применения специальных понятий—угловой скорости и т. п.; здесь точнее было бы говорить о движении по замкнутой трассе. При решении задач на движение двух тел очень часто удобно считать одно тело неподвижным, а другое—приближающимся к нему со скоростью, равной сумме скоростей этих тел (при движении навстречу) или разности скоростей (при движении вдогонку). Такая базовая модель помогает разобраться с условием задачи и получить нужные уравнения даже в таком относительно трудном случае, как движение по окружности. Если расстояние между пунктами, из которых начинают движение два тела, не задано, иногда бывает удобно положить его равным единице.

Основными типами задач на движение являются следующие:

- задачи на движение по прямой (навстречу и вдогонку),
- задачи на движение по замкнутой трассе,
- задачи на движение протяжённых тел,
- задачи на движение по воде,

- задачи на среднюю скорость.

Рассмотрим более подробно каждый из этих типов задач, выделив, где необходимо, базовые задачи. Если расстояние между двумя движущимися навстречу друг другу телами равно s , а их скорости— v_1 и v_2 , то время t , через которое они встретятся, находится по формуле $t = s / (v_1 + v_2)$.

Действительно, если одно из тел считать неподвижным, тогда второе будет приближаться к нему со скоростью, равной сумме скоростей, и пройдёт при этом расстояние, равное расстоянию между телами в момент начала движения, за время, равное отношению этого расстояния к скорости.

Пример 1. Расстояние между городами А и В равно 620 км. Из города А в город В со скоростью 85 км/ч выехал первый автомобиль, а через два часа после этого навстречу ему из города В выехал со скоростью 65 км/ч второй автомобиль. На каком расстоянии от города А автомобили встретятся?

Решение. Через два часа после выезда первого автомобиля расстояние между автомобилями стало равно $620 - 170 = 450$ (км), поэтому автомобили встретятся через время $t = \frac{450}{85 + 65} = 3$ (ч). Таким образом, до момента встречи первый автомобиль будет находиться в пути 5 часов и проедет $85 \cdot 5 = 425$ км.

Ответ . 425 км.

Если расстояние между двумя телами равно s и они движутся по прямой в одну сторону со скоростями v_1 и v_2 соответственно ($v_1 > v_2$) так, что первое тело следует за вторым, то время t , через которое первое тело догонит второе, находится по формуле $t = \frac{s}{v_1 - v_2}$.

Действительно, если второе тело считать неподвижным, тогда первое будет приближаться к нему со скоростью, равной разности скоростей, и пройдёт при этом расстояние, равное расстоянию между телами в момент начала движения, за время, равное отношению этого расстояния к скорости.

Пример 2. Два пешехода отправляются одновременно из одного и того же места на прогулку по аллее парка. Скорость первого на 1,3 км/ч больше скорости второго. Через сколько минут расстояние между пешеходами станет равным 520 метрам?

Решение. Время t в часах, за которое расстояние между пешеходами станет равным 520 метрам, т. е. 0,52 (км), находим по формуле $t = \frac{0,52}{1,3} = 0,4$ (ч). Следовательно, это время составляет 24 минуты.

Ответ. 24 минуты.

Рассмотрим теперь движение двух точек по окружности (замкнутой трассе) длины s в одном направлении при одновременном старте из одной точки со скоростями v_1 и v_2 ($v_1 > v_2$) и ответим на вопрос: через какое время первая точка будет опережать вторую ровно на один круг? Считая, что вторая точка покоится, а первая приближается к ней со скоростью $v_1 - v_2$, получим, что условие задачи будет выполнено, когда первая точка в первый раз поравняется со второй. При этом первая точка пройдет расстояние, равное длине трассы, и искомая формула ничем не отличается от формулы,

полученной для задачи на движение вдогонку: $t = \frac{s}{v_1 - v_2}$. Итак, если две точки одновременно начинают движение по окружности (замкнутой трассе) из одной точки в одну сторону со скоростями v_1 и v_2 соответственно ($v_1 > v_2$), то первая точка приближается ко второй со скоростью $v_1 - v_2$ и в момент, когда первая точка в первый раз догоняет вторую, она проходит расстояние, ровно на один круг большее, чем вторая.

Пример 3. Из одной точки круговой трассы, длина которой равна 12 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобилиста. Скорость первого автомобилиста равна 80 км/ч, и через 48 минут после старта он опережал второго автомобилиста на один круг. Найдите скорость второго автомобилиста.

Решение. Пусть скорость второго автомобилиста равна x км/ч. Поскольку 48 минут составляют $\frac{4}{5}$ часа и это и есть то время, за которое первый автомобилист будет опережать второго на один круг, составим по условию

$$\frac{12}{80 - x} = \frac{4}{5},$$

задачи уравнение: откуда $320 - 4x = 60$, и $x = 65$.

Ответ. 65 км/ч.

В задачах на движение по воде скорость течения считается неизменной. При движении по течению скорость течения прибавляется к скорости плывущего тела, а при движении против течения вычитается из скорости тела. Скорость плота считается равной скорости течения.

Пример 4. Рыболов отправляется на лодке от пристани с намерением вернуться через 7 ч. Перед возвращением он хочет побыть на берегу 4 ч. На какое наибольшее расстояние он может отплыть, если скорость течения реки равна 1 км/ч, а собственная скорость лодки равна 6 км/ч?

Решение. Пусть искомое расстояние равно x км. Скорость лодки при движении против течения равна 5 км/ч, а при движении по течению равна 7 км/ч. Время, за которое лодка доплывёт от места отправления до места назначения и обратно, равно $\frac{x}{5} + \frac{x}{7}$ ч. Из условия задачи следует, что это время равно 3 ч. Составим уравнение по условию задачи:

$$\frac{x}{5} + \frac{x}{7} = 3.$$

Решив уравнение, получим $x = 8,75$.

Ответ. 8,75 км.

В задачах на движение протяжённых тел требуется, как правило, определить длину одного из них. Наиболее типичная ситуация—определение длины поезда, проезжающего мимо столба или протяжённой платформы. В первом случае поезд проходит мимо столба расстояние, равное длине поезда, во втором случае—расстояние, равное сумме длин поезда и платформы.

Пример 6. По морю параллельными курсами в одном направлении следуют два сухогруза: первый длиной 120 метров, второй—длиной 80 метров. Второй сухогруз сначала отстаёт от первого на 900 метров, но уже через 27 минут опережает первый на 1,6 километра. На сколько километров в час скорость первого сухогруза меньше скорости второго?

Решение. Будем считать, что первый сухогруз неподвижен, а второй приближается к нему со скоростью x м/мин, равной разности скоростей второго и первого сухогрузов. Тогда за 27 минут второй сухогруз проходит расстояние $l = 900 + 80 + 120 + 1600 = 2700$ (м). Поэтому $x = \frac{2700}{27} = 100$ м/мин,

т. е. 6 км/ч.

Ответ. 6 км/ч.

Напомним, что средняя скорость вычисляется по формуле $v = \frac{S}{t}$, где S —путь, пройденный телом, а t —время, за которое этот путь пройден. Если путь состоит из нескольких участков, то следует вычислить всю длину пути и всё время движения. Например, если путь состоял из двух участков

протяжённостью s_1 и s_2 , скорости на которых были равны соответственно v_1 и v_2 , то $S=s_1+s_2$, $t=t_1+t_2$, где $t_1=\frac{s_1}{v_1}$, $t_2=\frac{s_2}{v_2}$.

Пример 7. Первую треть трассы велосипедист ехал со скоростью 18 км/ч, вторую треть—со скоростью 12 км/ч, а последнюю треть—со скоростью 9 км/ч. Найдите среднюю скорость велосипедиста на протяжении всего пути.

Решение. Обозначим длину всей трассы через $3s$ км. Тогда первую треть трассы велосипедист проехал за время $t_1=\frac{s}{18}$, вторую треть—за время $t_2=\frac{s}{12}$, последнюю треть—за время $t_3=\frac{s}{9}$. Значит, время, потраченное им на весь путь, равно $t_1+t_2+t_3$, т. е.

$$\frac{s}{18} + \frac{s}{12} + \frac{s}{9} = \frac{45s}{180} = \frac{s}{4}.$$

Поэтому искомая средняя скорость находится по формуле

$$v = \frac{3s}{\frac{s}{4}} = 3s \cdot \frac{4}{s} = 12 \text{ (км/ч)}.$$

Ответ. 12 км/ч.

Задачи на производительность и работу

В определённом смысле задачи на производительность (работу) схожи с задачами на движение: роль скорости здесь играет производительность, роль расстояния—объём работы. В тех случаях, когда объём работы в явном виде не задан, его иногда удобно принять равным единице. Существенно разных задач здесь практически нет, во всех случаях речь идёт о выполнении определённой работы, меняются только сюжеты, а «математическая» фабула остаётся одной и той же. Иногда в задачах на работу выделяют группу задач на трубы и бассейны, решение которых, вообще говоря, не имеет никаких специфических черт по сравнению с другими задачами на работу. В некоторых случаях при решении задач на совместную работу можно обойтись без решения уравнений, используя только арифметический способ. Правда, для этого порой приходится прибегать к гипотетическим допущениям.

Пример 8. Маша и Даша за день пропалывают 3 грядки, Даша и Глаша—4 грядки, а Глаша и Маша—5 грядок. Сколько грядок за день смогут прополоть девочки, работая втроём?

Решение. Вообразим, что сначала Маша и Даша работали один день, затем Даша и Глаша работали один день, а потом Глаша и Маша работали ещё один день. Получается, что каждая из девочек работала два дня, или что бригада, состоящая из Маши, Глаши и Даши, прополола $3+4+5=12$ грядок за два дня. Значит, за один день эта бригада прополет вдвое меньше грядок, т. е. 6.

Ответ. 6.

Ключевой в задачах на работу является следующая.

Пример 9. Первый мастер может выполнить некоторую работу за a часов, а второй мастер—за b часов. За какое время выполнят работу оба мастера, работая вдвоём?

Решение. Поскольку объём работы не задан, его можно принять равным единице. Тогда первый мастер за один час выполнит часть работы, равную $\frac{1}{a}$ второй— $\frac{1}{b}$, а оба мастера— $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. Значит, всю работу они выполнят за время

$$t = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

ОТВЕТ. $t = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ ч.

Пример 10. Каждый из двух рабочих одинаковой квалификации может выполнить заказ за 12 часов. Через 3 часа после того, как один из них приступил к выполнению заказа, к нему присоединился второй рабочий, и работу над заказом они довели до конца уже вместе. Сколько часов потребовалось на выполнение всего заказа?

Решение. Вдвоём рабочие за час делают $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ всей работы. За 3 часа первый рабочий сделал $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ всей работы. Оставшиеся $\frac{3}{4}$ работы рабочие делали уже вместе и потратили на это $\frac{3}{4} : \frac{1}{6} = 4,5$ ч. Значит, время, затраченное на выполнение всего заказа, составляет 7,5 часов.

Ответ. 7,5 ч.

Как уже отмечалось, в задачах на бассейны и трубы нет ничего специфического по сравнению с другими задачами на совместную работу.

Модельная ситуация остаётся той же, только мастерам будут соответствовать трубы или насосы разной производительности, а работа будет заключаться в наполнении бассейна или иного резервуара.

Пример 11. Первая труба пропускает на 6 литров воды в минуту меньше, чем вторая труба. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если бак объёмом 360 литров она заполняет на 16 минут медленнее, чем вторая труба?

Решение. Пусть первая труба пропускает x литров воды в минуту, $x > 0$. Тогда вторая труба пропускает $x + 6$ литров воды в минуту. Составим по условию задачи уравнение: $\frac{360}{x} = \frac{360}{x+6} + 16$. Разделив обе части уравнения на 8, получим

$\frac{45}{x} = \frac{45}{x+6} + 2$, и, следовательно, $\frac{45}{x} - \frac{45}{x+6} = 2$. Приведём дроби в левой части к общему знаменателю: $\frac{45(x+6) - 45x}{x(x+6)} = 2$, откуда $2x(x+6) = 45 \cdot 6$, и, значит, $x^2 + 6x - 135 = 0$. $x \quad x+ \quad -$

Корнями полученного квадратного уравнения являются числа -15 и 9 , из которых только последнее удовлетворяет условию $x > 0$.

Ответ. 9 л.

Задачи на проценты и концентрацию

Задачи на концентрацию (т. е. на процентное содержание какого то вещества в его растворе, сплаве или смеси) традиционно являются слабым звеном в подготовке школьников, кажутся многим из них довольно сложными. В таких задачах речь обычно идёт об изменении концентрации этого вещества после каких-либо манипуляций. При этом водные растворы, смеси или сплавы играют сходные роли и позволяют лишь несколько разнообразить сюжеты задач без изменения математического содержания. Ключевой при решении таких задач является идея отслеживания изменений, происходящих с «чистым» веществом (далее кавычки будем иногда опускать). При решении задач на концентрацию, сплавы, смеси целесообразно для наглядности использовать метод, который иногда не вполне научно называют «методом банок». Название появилось потому, что указанные в задаче вещества изображаются в виде условных «банок», каждая из которых делится на две части—верхнюю и нижнюю. В нижней записывается количество «чистого» или «сухого» вещества для каждой «банки», что позволяет почти

автоматически получить нужное уравнение или даже ответ.
Проиллюстрируем «метод банок» несколькими примерами.

Пример 12. Найдите концентрацию кислоты, полученной при смешивании 20 кг её 60-процентного и 30 кг её 20-процентного растворов.

Решение. Используем ключевую идею, заключающуюся в отслеживании того, что происходит с чистой кислотой. Изобразим схематически данные в условии растворы и раствор, полученный при их смешивании (т. е. применим «метод банок»):

20 кг	30 кг	50 кг
H_2O	H_2O	H_2O
чистое вещество:	чистое вещество:	чистое вещество:
$0,6 \cdot 20 = 12$	$0,2 \cdot 30 = 6$	$12 + 6 = 18$
60%	20%	$k\%$

$$k = \frac{18}{50} \cdot 100\% = 18 \cdot 2\% = 36\%.$$

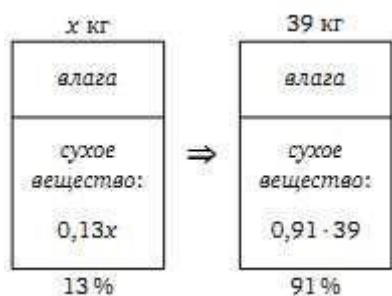
Искомая концентрация равна

В данном случае можно было бы не использовать формулу: ведь если в 50 кг раствора содержится 18 кг чистой кислоты, то в 100 кг этого раствора будет ровно 36 кг чистой кислоты, т. е. 36 сотых от 100, а значит, искомая концентрация равна 36%.

Ответ. 36%.

Иногда вместо «сложения банок» приходится использовать «превращение» одной «банки» в другую. Пример 13. Виноград содержит 87% влаги, а изюм—9%. Сколько килограммов винограда требуется для получения 39 килограммов изюма?

Решение. Используем ключевую идею: будем следить за массой «чистого», т.е. в данном случае «сухого» вещества в винограде и изюме. Пусть для получения 39 килограммов изюма требуется x кг винограда. Из условия следует, что доля «сухого» вещества в винограде составляет 13%, а в изюме—91%. Поэтому в x кг винограда будет $0,13x$ кг «сухого» вещества, а в 39 кг изюма его будет $0,91 \cdot 39$ кг:



Поскольку эта масса сухого вещества в винограде и изюме одна и та же, получим, что $0,13x = 0,91 \cdot 39$, откуда $13x = 91 \cdot 39$, и $x = 273$ (кг).

Ответ. 273 кг.

Решим теперь в общем виде ключевую задачу нахождения концентрации раствора, полученного в результате смешивания двух растворов одного и того же вещества, имеющих разные массы и разную концентрацию.

Пример 14. Смешали a литров n -процентного водного раствора некоторого вещества с b литрами m -процентного водного раствора этого же вещества. Найдите концентрацию получившейся смеси.

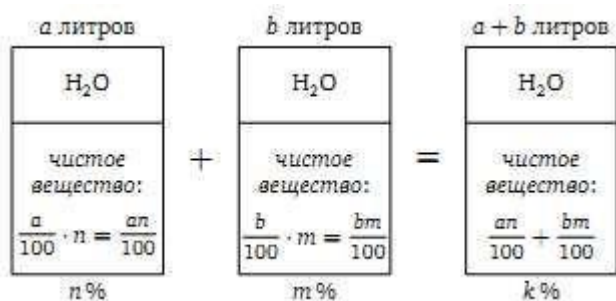
Решение. Воспользуемся ключевой идеей: проследим за изменениями, происходящими с чистым веществом. В первом растворе его было

$$\frac{a}{100} \cdot n = \frac{an}{100} \text{ литров,} \quad \text{во втором растворе —} \quad \frac{b}{100} \cdot m = \frac{bm}{100} \text{ литров.}$$

Значит, количество чистого вещества в полученной смеси будет равно

$$\frac{an}{100} + \frac{bm}{100}$$

литров, а всего этой смеси получится $a+b$ литров:



Теперь найти искомую концентрацию k не представляет труда:

$$k = \frac{\frac{an}{100} + \frac{bm}{100}}{a+b} \cdot 100\% = \frac{an+bm}{a+b} \%$$

ОТВЕТ. $\frac{an+bm}{a+b} \%$.

Заметим, что растворы в этой задаче можно было бы заменить двумя сплавами разной массы и с разным содержанием чистого вещества (например, одного из металлов). Решение при этом практически не изменится, поменяются лишь единицы измерения и названия веществ.

Пример 15. Первый сплав содержит 50% меди, второй—60% меди, а третий сплав весит 20 кг и содержит 30% меди. Из этих трёх сплавов получили сплав, в котором меди оказалось 49%. Если бы к первым двум сплавам вместо третьего сплава добавили 20-килограммовый сплав, содержащий 20% меди, то получили бы сплав, в котором меди было бы 47%. Найдите массу второго сплава.

Решение. В этой задаче неизвестны массы первого и второго сплавов, но даны два варианта получения третьего сплава. Поэтому схему «метода банок» придётся применить дважды: для случая, когда третий сплав содержит 30% меди, и для случая, когда он содержит 20% меди. Массы первого и второго сплавов (в килограммах) обозначим соответственно через x и y . Тогда для первого случая получим следующую схему:

x кг		y кг		20 кг		$x + y + 20$ кг
медь		медь		медь		медь
$0,5x$	+	$0,6y$	+	$0,3 \cdot 20 = 6$	=	$0,49(x+y+20)$
50 %		60 %		30 %		49 %

Для второго случая схема выглядит так:

x кг		y кг		20 кг		$x + y + 20$ кг
медь		медь		медь		медь
$0,5x$	+	$0,6y$	+	$0,2 \cdot 20 = 4$	=	$0,47(x+y+20)$
50 %		60 %		20 %		47 %

Приведённые схемы позволяют сразу получить систему двух линейных уравнений для определения неизвестных x и y :

$$\begin{cases} 0,5x + 0,6y + 6 = 0,49(x + y + 20), \\ 0,5x + 0,6y + 4 = 0,47(x + y + 20). \end{cases}$$

“Чтобы избежать возможных и довольно распространённых ошибок в действиях с дробями, умножим обе части каждого уравнения на 100.

Получим
$$\begin{cases} 50x + 60y + 600 = 49(x + y + 20), \\ 50x + 60y + 400 = 47(x + y + 20). \end{cases} \quad \begin{cases} x + 11y = 380, \\ 3x + 13y = 540. \end{cases}$$

Обратим внимание на то, что значение x в данной задаче находить необязательно. Умножим обе части первого уравнения системы на -3 . Чтобы исключить переменную x , сложим почленно полученное после умножения на -3 уравнение и второе уравнение системы: $-20y = -600$, откуда $y = 30$.

Ответ. 30 кг.

Используемый ресурс:

1. Яценко И. В., Шестаков С. А. ОГЭ по математике от А до Я. Модульный курс. Алгебра.—М.: МЦНМО, 2019.—224 с.
2. СДАМ ГИА: РЕШУ ОГЭ Образовательный портал для подготовки к экзаменам Математика